

المنشور في دار الكتب

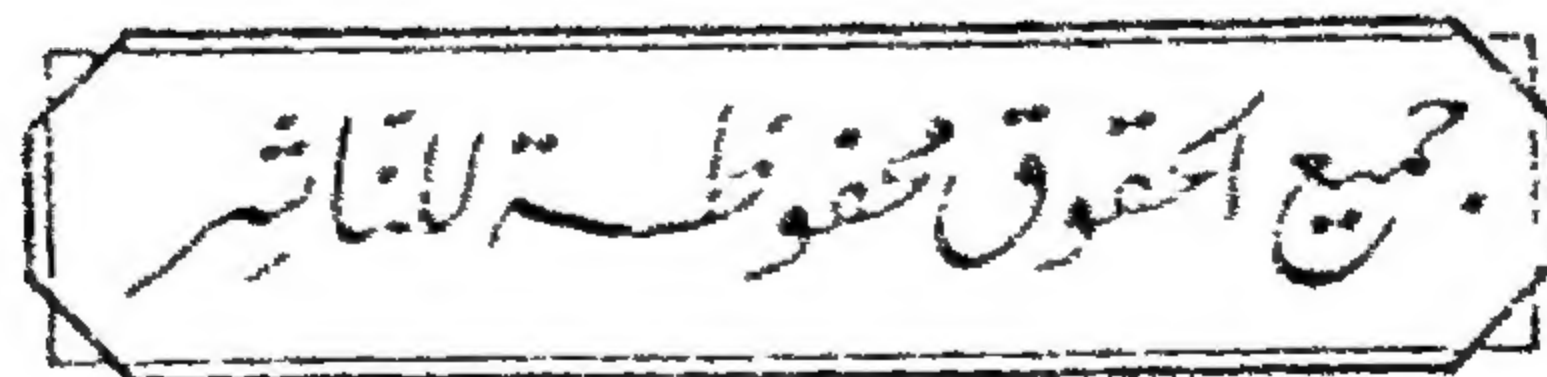
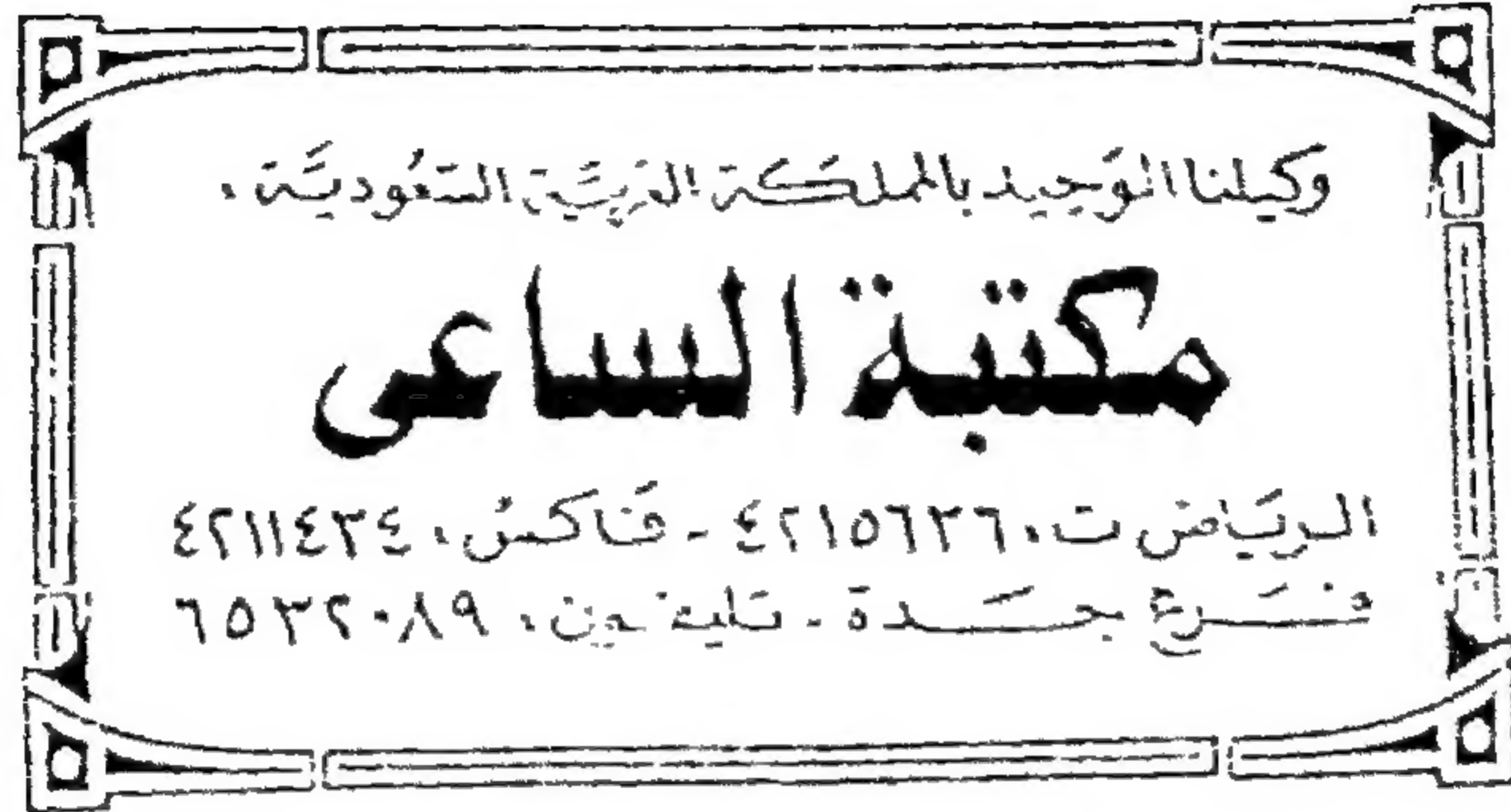
الرياضيات المسلمة

منفعة . فن . ذكاء

مكتبة ابن سينا

للنشر والتوزيع والتصدير

٧٦ شارع محمد فريد - جامع الفتح - النزهة
مقعد لحدادة القاهرة ٢٤٧٩٨٦٣ / ٢٤٨٠٤٨٣



بسم الله الرحمن الرحيم

مكتبة ابن سينا

نافذتك على الفكر العربي
والعالمى بما تقدمه لك من روائع
الكتب العلمية والفنية والراثية
التي تجمع بين الأصالة والمعاصرة.

يديرها ويشرف عليها
مهندس مصطفى عاصور

مَقَرَّة

يتمتع علم الرياضيات بجاذبية خاصة وسحر أخاذ وبريق مبهر يستهوى الأفعدة ويأخذ بنواصي الألباب ..

فهو مادة إيقاظ الفكر وشحن المواهب وبناء العقول ، إلى جانب كونه الأساس والقاعدة والدعامة والركيزة للعديد من العلوم الهامة التي بنت الحضارات وشيدت الصناعات وأقامت دولاً ورفعت أقواماً .

إن الرياضيات هي مادة البناء في أبحاث الفضاء والفلك ، والأجهزة الإلكترونية التي دخلت جميع مجالات الحياة وتغلغلت بها وانتقلت بالناس من عالم إلى عالم آخر .. من عالم هادئ بطيء الحركة رتيبة الإيقاع إلى عالم مليء بالحركة والقفزات والتطلعات الموثابة .

وبالرغم من أن الرياضيات مادة مشوقة ، تميل النفس إلى دراستها والبحث فيها إلا أنها في كثير من الأحيان تكون حجر عثرة أمام الكثيرين منا ، وذلك بسبب عدم استيعابنا لأصولها ونظرياتها وقوانينها .

ومما لا شك فيه أن هذا المعجز عن الفهم لم يكن عيباً في ذات المادة ولكنه نابع من ذاتنا نحن !!

لقد اعتاد طلابنا دراسة الرياضيات لهدف واحد وهو اجتياز الاختبارات ، وبالتالي لم يطلقوا لأنفسهم العنان حتى يستوضحوا الجوانب الواسعة لهذا العلم ..

وكانت النتيجة أن نظروا إليها كمادة صماء مليئة بالمشاكل والتعقيدات ، لدرجة أن البعض نراه يطلق على أى مشكلة مستعصية الحل أنها « لوغاريتمات رياضية » !!

مع أن اللوغاريتمات هذه تعد بمثابة الوسيلة لحل المشاكل وليست لتعقيدها ! إنه لكى يتسنى لنا فهم وإدراك كُنه الرياضيات علينا أن نخوض غمارها ليس بعقلنا فقط بل بروحنا وعواطفنا أيضاً ، لأننا لا بد أن نعيشها ونتألف معها ونألفها ونأنس بها ، حتى يتحقق لنا الوصول إلى كل خفاياها حتى نستفيد من جدواها ومن استخداماتها التى لا تحصى .

ومن هذا المنطلق كان سعى لتقديم هذا الكتاب الذى تضمنته بعض الطرق والأساليب التى تعرض المبادئ والنظريات الرياضية فى صورة حيوية ملموسة ، حتى يضع القارئ يده عليها ويتحسسها بدلاً من أن تكون محض خيال ونظريات غامضة يفرق فيها فلا يعرف له برّاً ، ولا إلى أين يسير !

لقد وضعت ألباناً تحتاج فى حلها إلى معادلات ذات المجهول أو المجهولين أو أكثر وقمت بحلها ليتضح له معنى حل المعادلات وفائدتها واستخداماتها . وهذا ما يجعلها ترسخ فى ذهنه ويصبح قادراً على تطبيقها فى شتى مجالات الحياة هذا بالإضافة إلى مسائل أخرى للتدريب على الأسس واللوغاريتمات والاحتمالات وغيرها من الموضوعات التى انصهرت فيها النظريات والقوانين فى بوتقة اللغز

والفزورة والأحجية والمتاهة والمغالطة ونحوها . لتقدم في أطباق
المسلّيات والمشهيات فتصبح سائغة لذيدة سهلة لكل من يتناولها .
لقد جمعت في هذا الكتاب بين هدفين .. الأول أن يتوفر فيه
التشويق والتسلية والمرح . والثاني أن تكون من ورائه فائدة عظيمة
يُنتفع بها القارئ ويستفيد منها ، حتى لا يحس بأن وقته قد ضاع
سدى ، ولكنها المتعة المغذية ، والتغذية المسلية في آن معاً .

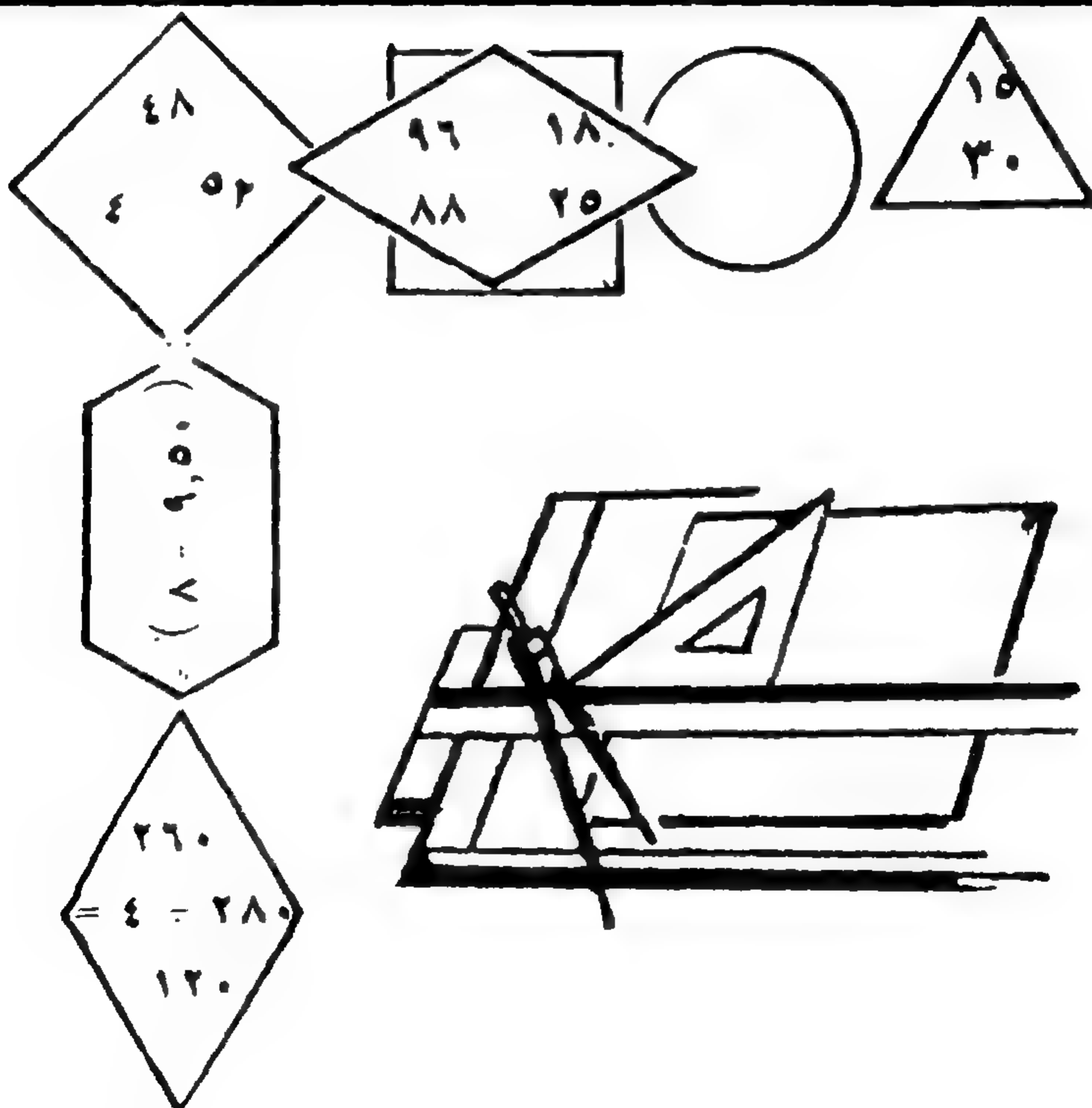
نسأل الله التوفيق والرشاد ...

مهندس / عاطف أحمد منصور

جمادى الأولى ١٤١٠ هجرية
القاهرة في ديسمبر ١٩٨٩ ميلادية

الباب الاول

ألفاز رقمية



أطلب من زميلك أن يتخير أى عدد من صفر وحتى ٩٩ ولا يخبرك به ، ثم اطلب منه القيام بعدة عمليات حسابية بسيطة وبعدها سوف تخبره بالرقم الذى تخبره .

وفيما يلى العمليات المطلوب من زميلك أن يؤديها وبتنفس التسلسل : -

١ - أن يكتب عمره بالسنوات الصحيحة فى ورقة

٢ - أن يضاعف عمره

٣ - أن يضيف ٥ للمجموع

٤ - أن يضرب الناتج فى مائة ($\times 100$)

٥ - أن يقسم الناتج على ٢

٦ - أن يطرح من الناتج عدد أيام السنة (٣٦٥)

٧ - أن يضيف للناتج العدد الذى تخبره فى البداية ثم يخبرك بالناتج النهائى

وبعد هذا يأتى دورك أنت ، فعليك أن تضيف للناتج ١١٥ فستحصل على عدد مكون من أربعة أرقام (فى حالة العمر أكبر من عشر سنوات) أو ثلاثة أرقام (فى حال العمر أقل من عشر سنوات)

فالرقمان اللذان على اليسار فى العدد هما عمر زميلك بالسنوات بينما الرقمان على اليمين هما العدد الذى اختاره أولاً .

وفيما يلى مثالين لتوضيح هذا ، مرة فى حالة العمر أكبر من عشر سنوات ومرة ثانية فى حالة العمر أقل من عشر سنوات .

نفترض أولاً أنه اختار رقم ٦٠

ولنفرض أن عمره هو ٤٠ عاماً

وبتطبيق العمليات الحسابية السابقة

.. العمر = ٤٠

.. ضعف العمر = ٨٠

يضاف ٥ للعمر = ٨٥

يضرب $\times 100 = ٨٥٠٠$

يقسم على ٢ = ٤٢٥٠

يطرح ٣٦٥ = ٤٢٥٠ - ٣٨٨٥

يضيف لهذا الناتج العدد الذى إختاره (٦٠) : -

$$٣٩٤٥ = ٦٠ + ٣٨٨٥ =$$

أضف لهذا الناتج الأخير ١١٥ = ٣٩٤٥ + ١١٥ = ٤٠٦٠

وهو عدد مكون من ٤ أرقام (٤ ، ٠ ، ٦ ، ٠)

فالرقمان على اليمين (٦٠) هما العدد الذى إختاره

والرقمان على اليسار (٤٠) هما عمر زميلك

ومرة ثانية :

نفرض أنه إختار العدد ٨٧ وعمره ٩ سنوات

∴ العمر = ٩

ضعف العمر = ١٨

يضيف ٥ للعمر = ٢٣

ي ضرب ١٠٠ × = ٢٣٠٠

يقسم على ٢ = ١١٥٠

يطرح ٣٦٥ = ١١٥٠ - ٧٨٥

يضيف رقم ٨٧ = ٧٨٥ + ٨٧ = ٨٧٢

ثم قم أنت بإضافة ١١٥ = ٨٧٢ + ١١٥ = ٩٨٧

وهو عدد مكون من ثلاث أرقام (٩ ، ٨ ، ٧)

فالرقمان على اليمين (٨٧) هما العدد الذى إختاره

والرقمان على اليسار (٩) هو عمره بالسنوات

◀ **الإثبات الرياضى :**

١ - نفترض أن رقم أحاد العدد الذى تخيره صديقك هو س وأن رقم

عشراته هو ص .

∴ فالعدد يمكن كتابته كالتالى (س + ١٠ ص)

ولنفترض أن رقم آحاد العمر هو ع ورقم العشرات هو ل

∴ فالعمر يمكن كتابته على الصورة (ع + ١٠ ل).

والآن نُجرى العمليات السابقة على العمر .

$$\text{الضرب } 2 \times 2 = 2 (ع + ١٠ ل) = ٢ ع + ٢٠ ل$$

$$\text{إضافة } ٥ = ٢ ع + ٢٠ ل + ٥$$

$$\text{الضرب } 100 \times 200 = ٢٠٠ ع + ٢٠٠٠ ل + ٥٠٠$$

$$\text{القسمة على } 2 = ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل + ٢٥٠$$

$$\text{طرح } 365 = ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل + ٢٥٠ - 365$$

$$= ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل - 115$$

$$\text{إضافة العدد الأول : (س + ١٠ ص) + ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل - 115}$$

$$\text{إضافة } 115 : (س + ١٠ ص) + ١٠٠ ع + ١٠٠٠ ل$$

لاحظ أن العدد الأول (الرقمان على اليمين) أصبحا س + ١٠ ص وهو

العدد المختار والعدد الآخر (الرقمان على اليسار) أصبحا ١٠٠ ع + ١٠٠ ل

وهو العمر .



٢ - من عجائب الرقم ٩ أنك إذا ضربته في أى رقم صحيح مهما كان فإن

مجموع خانات الرقم الناتج يساوى إما العدد ٩ نفسه أو مضاعفاته .

◀ الحل :

كمثال :

$$9 = 1 \times 9$$

$$9 = 1 + 8 , \quad 18 = 2 \times 9$$

$$9 = 2 + 7 , \quad 27 = 3 \times 9$$

$$9 = 3 + 6 , \quad 36 = 4 \times 9$$

$$9 = 4 + 5 , \quad 45 = 5 \times 9$$

وهكذا حتى نصل إلى :

$$9 = 9 + 0 , \quad 90 = 10 \times 9$$

$$9 = 1 + 8 \quad , \quad 18 = 9 + 9 \quad , \quad 99 = 11 \times 9$$

وهكذا حتى نصل إلى :

$$9 = 1 + 2 + 1 + 5 \quad , \quad 1215 = (\text{مثلاً}) 135 \times 9$$

$$, \quad 738 \times 9 = (\text{مثلاً}) 6642 \quad , \quad 18 = 6 + 6 + 4 + 2$$

$$9 = 1 + 8$$

وهكذا .



٣ - عند ضرب العدد ٣٧ في الرقم ٣ ومضاعفاته (٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ...) فإننا نحصل على عدد ، آحاده وعشراته ومئاته هي نفس الرقم .
الحل :

وكمثال :

$$444 = 12 \times 37$$

$$111 = 3 \times 37$$

$$555 = 15 \times 37$$

$$222 = 6 \times 37$$

$$666 = 18 \times 37 \quad \text{وهكذا .}$$

$$333 = 9 \times 37$$

أما إذا جعلنا العدد ٣٧ مقاماً لأي كسر اعتيادي بسطه عدد صحيح فإننا نحصل على كسر دبر كالتالي :

$$0,108108108 = \frac{4}{37}$$

$$0,027027027 = \frac{1}{37}$$

$$0,135135135 = \frac{5}{37}$$

$$0,054054054 = \frac{2}{37}$$

$$0,162162162 = \frac{6}{37}$$

$$0,081081081 = \frac{3}{37}$$

وهكذا حتى نصل إلى :

$$0,945945945 = \frac{35}{37}$$

$$0,972972972 = \frac{36}{37}$$



٤ - إن العدد ١٢٣٤٥٦٧٩ على الرغم من كبره ، حيث يبلغ إنا عشرة مليوناً وثلاثمائة خمس وأربعون ألفاً ومستمائة تسعة وسبعون ، هو أيضاً من الأعداد العجيبة فعند ضربه في الرقم ٣ ومضاعفاته فإننا نلاحظ الآتى .

$$٣٧٠ \ ٣٧٠ \ ٣٧ = ٣ \times ١ \ ٢ \ ٣ \ ٤ \ ٥ \ ٦ \ ٧ \ ٩$$

$$٧٤٠ \ ٧٤٠ \ ٧٤ = ٦ \times ١ \ ٢ \ ٣ \ ٤ \ ٥ \ ٦ \ ٧ \ ٩$$

$$١ \ ١١١ \ ١١١ \ ١١ = ٩ \times ١ \ ٢ \ ٣ \ ٤ \ ٥ \ ٦ \ ٧ \ ٩$$

$$١٤٨ \ ١٤٨ \ ١٤٨ = ١٢ \times ١ \ ٢ \ ٣ \ ٤ \ ٥ \ ٦ \ ٧ \ ٩$$

$$٢٢٢ \ ٢٢٢ \ ٢٢٢ = ١٨ \times$$

$$٣٣٣ \ ٣٣٣ \ ٣٣٣ = ٢٧ \times$$

$$٤٤٤ \ ٤٤٤ \ ٤٤٤ = ٣٦ \times$$

$$٥٥٥ \ ٥٥٥ \ ٥٥٥ = ٤٥ \times$$

$$٦٦٦ \ ٦٦٦ \ ٦٦٦ = ٥٤ \times$$

$$٧٧٧ \ ٧٧٧ \ ٧٧٧ = ٦٣ \times$$

$$٨٨٨ \ ٨٨٨ \ ٨٨٨ = ٧٢ \times$$

$$٩٩٩ \ ٩٩٩ \ ٩٩٩ = ٨١ \times$$

$$١٠٣٧ \ ٠٣٧ \ ٠٣٧ = ٨٤ \times$$

$$١٠٧٤ \ ٠٧٤ \ ٠٧٤ = ٨٧ \times$$



: ١٠٩٨ - ٥

$$١٠٩٨ = ٤٤٤ + ٦٥٤$$

$$١٠٩٨ = ٨٨٨ + ٢١٠$$

$$١٠٩٨ = ٣٣٣ + ٧٦٥$$

$$١٠٩٨ = ٧٧٧ + ٣٢١$$

$$١٠٩٨ = ٢٢٢ + ٨٧٦$$

$$١٠٩٨ = ٦٦٦ + ٤٣٢$$

$$١٠٩٨ = ١١١ + ٩٨٧$$

$$١٠٩٨ = ٥٥٥ + ٥٤٣$$

يلاحظ أنه في جميع الحالات فإن المجموع واحد ويساوى ١٠٩٨

بينما أحد العددين هو ١١١ ومضاعفاته أبى ٢٢٢ ، ٣٣٣ ، ...

والعدد الآخر (الأول) يتكون من ثلاثة أرقام ، ويلاحظ أن رقم الآحاد بها هو (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٧) بينما رقم العشرات هو (١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٧ ، ٨) ورقم المئات هو (٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ٨ ، ٩) .



٦ - عودة لعجائب الرقم ٩ :

$$٩ \times \text{صفر} = ١ + ١$$

$$٩ \times ٠.١ = ٢ + ١١$$

$$٩ \times ١٢ = ٣ + ١١١$$

$$٩ \times ١٢٣ = ٤ + ١١١١$$

$$٩ \times ١٢٣٤ = ٥ + ١١١١١$$

وهكذا حتى :

$$٩ \times ١٢٣٤٥٦٧ = ٨ + ١١١١١١١١$$

[١١ مليون ، ١١١ ألف ، ١١١]



٧ - إذا جعلنا العدد ١١ مقاماً للكسر اعتيادي بسطه رقم صحيح نحصل على كسر دائر كالتالي :

$$٠,٠٩٠٩٠٩٠٩ = \frac{١}{١١}$$

$$٠,١٨١٨١٨١٨ = \frac{٢}{١١}$$

$$٠,٢٧٢٧٢٧٢٧ = \frac{٣}{١١}$$

$$٠,٣٦٣٦٣٦٣٦ = \frac{٤}{١١}$$

$$٠,٤٥٤٥٤٥٤٥٤ = \frac{٥}{١١}$$

وهكذا حتى نصل إلى :

$$٠,٩٠٩٠٩٠٩٠ = \frac{١٠}{١١}$$



٨ - اختر ثلاثة أعداد صحيحة متتالية .

اضرب الأول في الثاني ثم اضرب الثاني في الثالث .
أوجد الفرق بين حاصل الضرب تجده يساوى ضعف الرقم الأوسط .
الحل :

نفترض أننا اخترنا الأعداد :

$$١٦ ، ١٧ ، ١٨ \text{ فنجد أن}$$

$$٢٧٢ = ١٧ \times ١٦$$

$$٣٠٦ = ١٨ \times ١٧$$

$$٣٤ = ٢٧٢ - ٣٠٦ ،$$

ويلاحظ أن ٣٤ هي ضعف العدد ١٧
الإثبات :

لنفترض أن العدد الأول = س

$$\therefore \text{العدد الذي يليه} = س + ١$$

$$، \text{العدد الذي يليه} = س + ٢$$

.....

$$، س (س + ١) = س^٢ + س$$

(٢)

$$، س (س + ٢) = س^٢ + ٢س + ٢$$

$$، \text{الفرق بين (٢) ، (١)} = ٢س + ٢ = ٢ (س + ١)$$

$$\therefore \text{الفرق} = \text{ضعف الرقم الأوسط} .$$



٩ - اختر أى ثلاثة أعداد زوجية أو فردية متتالية واجر عليها نفس

الخطوات السابقة فماذا تلاحظ ؟

الحل :

نفترض الأعداد الزوجية هي :

$$١٢ ، ١٤ ، ١٦$$

$$، ١٦٨ = ١٤ \times ١٢$$

$$٢٢٤ = ١٦ \times ١٤ ،$$

$$٥٦ = ١٦٨ - ٢٢٤ ،$$

$$\text{ويلاحظ أن } ٥٦ = ١٤ \times ٤$$

، نفترض أننا نختارنا الأرقام الفردية التالية .

$$١١ ، ٩ ، ٧$$

$$٦٣ = ٩ \times ٧ \therefore$$

$$٩٩ = ١١ \times ٩ ،$$

$$٩ \times ٤ = ٣٦ = ٦٣ - ٩٩ .$$

نرى أن الفرق هنا هو أربعة أضعاف الرقم الأوسط .

ويمكن إثباتها بسهولة كما سبق ورأينا .



١٠ - إذا جمعنا أى عدد مع معكوسه فإننا نحصل على عدد يقبل القسمة على ١١ ، (العدد من خانتين فقط) .

◀ **الحل :**

أنظر إلى الأمثلة التالية :

$$١٨٧ = ٨٩ + ٩٨$$

$$١٧٦ = ٧٩ + ٩٧$$

$$١٦٥ = ٦٩ + ٩٦$$

$$١٥٤ = ٥٩ + ٩٥$$

وهكذا حتى :

$$١١٠ = ١٩ + ٩١$$

$$٩٩ = ٠٩ + ٩٠$$

وفيما يلي الإثبات .

نفرض أن رقم الآحاد في العدد المختار هو س ، ص رقم العشرات

$$\therefore \text{العدد} = س + ١٠ ص$$

، معكوس العدد = ص + ١٠ س

وبالجمع :

∴ العدد + معكوسه = ١١س + ١١ص = ١١(س + ص)

أى أنه يقبل القسمة على ١١

$$٥٠٤ = ٤٢ \times ١٢ = ٢٤ \times ٢١ \quad \text{ومنها} \quad ٢ \times ٢ = ٤ \times ١$$

$$٧٥٦ = ٦٣ \times ١٢ = ٣٦ \times ٢١ \quad \text{ومنها أيضاً} \quad ٣ \times ٢ = ٦ \times ١ ،$$

$$٨٠٦ = ٦٢ \times ١٣ = ٢٦ \times ٣١ \quad \text{ومنها أيضاً}$$

$$١٠٠٨ = ٨٤ \times ١٢ = ٤٨ \times ٢١ \quad \text{ومنها} \quad ٤ \times ٢ = ٨ \times ١ ،$$

$$١١٤٨ = ٨٢ \times ١٤ = ٢٨ \times ٤١ \quad \text{ومنها أيضاً}$$

$$١٢٠٩ = ٩٣ \times ١٣ = ٣٩ \times ٣١ \quad \text{ومنها} \quad ٣ \times ٣ = ٩ \times ١ ،$$

$$١٥١٢ = ٦٣ \times ٢٤ = ٣٦ \times ٤٢ \quad \text{ومنها} \quad ٣ \times ٤ = ٦ \times ٢ ،$$

$$١٤٧٢ = ٦٤ \times ٢٣ = ٤٦ \times ٣٢ \quad \text{ومنها أيضاً}$$

$$٢٠١٦ = ٨٤ \times ٢٤ = ٤٨ \times ٤٢ \quad \text{ومنها} \quad ٤ \times ٤ = ٨ \times ٢ ،$$

$$٢٢٠٨ = ٩٦ \times ٢٣ = ٦٩ \times ٣٢ \quad \text{ومنها} \quad ٦ \times ٣ = ٩ \times ٢ ،$$

$$٢٤١٨ = ٩٣ \times ٢٦ = ٣٩ \times ٦٢ \quad \text{ومنها أيضاً}$$

$$٢٩٢٤ = ٨٦ \times ٣٤ = ٦٨ \times ٤٣ \quad \text{ومنها} \quad ٦ \times ٤ = ٨ \times ٣ ،$$

$$٣٠٢٤ = ٨٤ \times ٣٦ = ٤٨ \times ٦٣ \quad \text{ومنها أيضاً}$$

$$٤٤١٦ = ٩٦ \times ٤٦ = ٦٩ \times ٦٤ \quad \text{ومنها} \quad ٦ \times ٦ = ٩ \times ٤ ،$$

وهكذا وعليك عزيزى القارىء بمحاولة إثبات هذه الأعجوبة .



١١ - (أ) إن العدد ٣٣٧ إذا ضرب فى ٣ ومضاعفاته فإننا نحصل على

نواتج ، أرقامها ذات تسلسل معين كالآتى :

◀ الحل :

$$٣٠٣٣ = ٩ \times ٣٣٧$$

$$١٠١١ = ٣ \times ٣٣٧$$

$$٤٠٤٤ = ١٢ \times ٣٣٧$$

$$٢٠٢٢ = ٦ \times ٣٣٧$$

$$٦٠٦٦ = ١٨ \times ٣٣٧$$

$$٥٠٥٥ = ١٥ \times ٣٣٧$$

$$٧٠٧٧ = ٢١ \times ٣٣٧$$

وهكذا حتى :

$$٩٠٩٩ = ٢٧ \times ٣٣٧$$

(ب) ٣٠٣٧ :

◀ الحل :

نفس الشيء مع العدد ٣٠٣٧ فعند ضربه في الرقم ٣ ومضاعفاته فإننا نحصل على أعداد أرقامها ذات تسلسل معين كالآتي :

$$٩١١١ = ٣ \times ٣٠٣٧$$

$$١٨٢٢٢ = ٦ \times ٣٠٣٧$$

$$٢٧٣٣٣ = ٩ \times ٣٠٣٧$$

$$٣٦٤٤٤ = ١٢ \times ٣٠٣٧$$

وهكذا حتى :

$$٨١٩٩٩ = ٢٧ \times ٣٠٣٧$$

(ج) ٣٧٣٧ :

عند ضربه في ٣ ومضاعفاتها نحصل على تسلسل غريب من الأعداد كما يلي :

$$١١٢١١ = ٣ \times ٣٧٣٧$$

$$٢٢٤٢٢ = ٦ \times$$

$$٣٣٦٣٣ = ٩ \times$$

$$٤٤٨٤٤ = ١٢ \times$$

$$٥٦٠٥٥ = ١٥ \times$$

$$٦٧٢٦٦ = ١٨ \times$$

$$٧٨٤٧٧ = ٢١ \times$$

$$٨٩٦٨٨ = ٢٤ \times$$

$$١٠٠٨٩٩ = ٢٧ \times$$

$$١١٢١١٠ = ٣٠ \times$$

$$١٢٣٣٢١ = ٣٣ \times$$

(د) ٣٣٠٣٣ :

$$٩٩٠٩٩ = ٣ \times ٣٣٠٣٣$$

$$١٩٨١٩٨ = ٦ \times$$

$$٢٩٧٢٩٧ = ٩ \times$$

$$٣٩٦٣٩٦ = ١٢ \times$$

$$٤٩٥٤٩٥ = ١٥ \times$$

$$٥٩٤٥٩٤ = ١٨ \times$$

وهكذا حتى :

$$٩٩٠٩٩٠ = ٣٠ \times$$

وكذلك :

$$٦٦٠٦٦ = ٢ \times$$

$$١٣٢١٣٢ = ٤ \times$$

$$١٩٨١٩٨ = ٦ \times$$

$$٢٦٤٢٦٤ = ٨ \times$$

وهكذا حتى ٣٣٠٣٣ \times ٥٠ = ١٦٥١٦٥٠ .

، وكذلك :

$$١٦٥١٦٥ = ٥ \times ٣٣٠٣٣$$

$$٣٣٠٣٣٠ = ١٠ \times$$

$$٤٩٥٤٩٥ = ١٥ \times$$

وهكذا حتى نصل إلى

$$٢٩٧٢٩٧٠ = ٩٠ \times ٣٣٠٣٣$$

(د) ٣٧.٣٧ :

$$١١١ \ ١١١ = ٣ \times ٣٧.٣٧$$

$$٢٢٢ \ ٢٢٢ = ٦ \times$$

$$٣٣٣ \ ٣٣٣ = ٩ \times$$

$$٤٤٤ \ ٤٤٤ = ١٢ \times$$

وهكذا حتى نصل إلى :

$$٩٩٩٩٩٩ = ٢٧ \times ٣٧.٣٧$$

$$١١١١١١٠ = ٣٠ \times$$

$$١٢٢٢٢٢١ = ٣٣ \times$$

$$١٣٣٣٣٣٢ = ٣٦ \times$$

$$١٤٤٤٤٤٣ = ٣٩ \times$$

وهكذا حتى :

$$٢٩٩٩٩٩٧ = ٨١ \times ٣٧.٣٧$$

وكذلك :

$$٧٤٠.٧٤ = ٢ \times ٣٧.٣٧$$

$$١٤٨١٤٨ = ٤ \times$$

$$٢٢٢٢٢٢ = ٦ \times$$

$$٢٩٦٢٩٦ = ٨ \times$$

$$٣٧.٣٧. = ١٠ \times$$

$$٤٤٤٤٤٤ = ١٢ \times$$

وهكذا يمكن تكوين عدد كبير جداً من الأعداد العجيبة .



١٢ - كيف يمكنك أن تعبر عن العدد ١٠ باستعمال خمسة تسعات (٩) ومسموح باستخدام الرموز والعلامات المستعملة في العمليات الرياضية .

◀ الحل :

$$10 = 9 - \frac{99}{99} - 1$$

$$10 = 9 + \frac{99}{99} - 2$$

$$10 = \frac{9}{9} - \frac{99}{9} - 3$$

$$10 = \frac{9 \times 9}{9} + \frac{9}{9} - 4$$

$$10 = 9 + \frac{9+9}{9+9} - 5$$

$$10 = 9 + \frac{9-9+9}{9} - 6$$

$$10 = \frac{9}{9} \left(9 - \frac{9}{9} \right) - 7$$

$$10 = 9 - 9(99) + 9 - 8$$

$$10 = 9 + \frac{9}{9} \left(-\frac{9}{9} \right) - 9$$

$$10 = 1 + 1 \times 9 = 1 + 9 \text{ لو } 9 = \frac{9}{9} + 9(9) \text{ لو } 9$$



١٣ - كيف يمكنك أن تعبر عن رقم ١ باستعمال كل الأرقام من صفر إلى تسعة مستعملاً الرموز والعلامات الرياضية المختلفة .

◀ الحل :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{35}{70} + \frac{148}{296} - 1$$

$$2 - (987654321) \text{ صفر}$$

$$= 1 \text{ ويمكن تغيير وضع الأرقام هكذا : } (123456789) \text{ صفر}$$

$$3 - (4567890) - 2 - 1$$

$$-4 - \left(\frac{5678}{9} + \frac{123}{4} \right) \text{ صفر}$$

= ١ [ويمكن إعادة تغيير وضع الأرقام داخل القوس ونحصل في جميع الحالات على نفس الجواب]

$$-5 - \left(\frac{87}{9} + \frac{123}{654} \right) \text{ صفر} = 1$$



١٤ - عبر عن العدد ١٠٠ باستعمال الأرقام من صفر إلى تسعة .

◀ الحل :

$$100 = 5 \frac{3}{6} + 24 \frac{9}{18} + 70 \quad (1)$$

$$100 = 3 \frac{12}{60} + 9 \frac{4}{5} + 87 \quad (2)$$

$$100 = 19 \frac{3}{6} + 80 \frac{27}{54} \quad (3)$$

$$100 = 49 \frac{38}{76} + 50 \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$100 = 19 + 26 - 50 - 74 + 83 \quad (5)$$



١٥ - كيف يمكنك التعبير عن العدد ١٠٠ مستعملاً خمسة أرقام متساوية وبعده طرق مختلفة .

◀ الحل :

$$100 = 5 \times (5 + 5 + 5 + 5) - 1$$

$$100 = 5 \times 5 - 5 \times 5 \times 5 - 2$$

$$100 = \frac{2}{3} + 3 \times 33 - 3$$

$$100 = 11 - 111 - 4$$

١٦ - عبر عن العدد ١٠٠ مستعملاً ستة أرقام متساوية وبعده طرق مختلفة .

◀ الحل :

$$١٠٠ = \frac{٢٢ - ٢٢٢}{٢} , ١٠٠ = \frac{١١ - ١١١}{١}$$

$$١٠٠ = \frac{٩٩ - ٩٩٩}{٩} , , ١٠٠ = \frac{٣٣ - ٣٣٣}{٣} ,$$

$$١٠٠ = ٥٥ (٥ + ٥) (٥ + ٥) ,$$



١٧ - عبر عن العدد ١٠٠٠ باستعمال ستة أرقام متساوية . مسموح باستخدام العلامات والرموز الرياضية .

◀ الحل :

$$١٠٠٠ = \frac{٣}{٣} + ٣ \times ٣٣٣ (١)$$

وهناك عدة حلول أخرى فحاول البحث عنها .



١٨ - عبر عن العدد ١٠٠٠ مستعملاً ثمانية أرقام متساوية . مسموح باستخدام العلامات والرموز الرياضية .

◀ الحل :

$$١٠٠٠ = ٨ + ٨ + ٨ + ٨٨ + ٨٨٨ (١)$$

$$١٠٠٠ = \frac{٩}{٩} - \left(\frac{٩+٩}{٩}\right) + ٩٩٩ (٢)$$

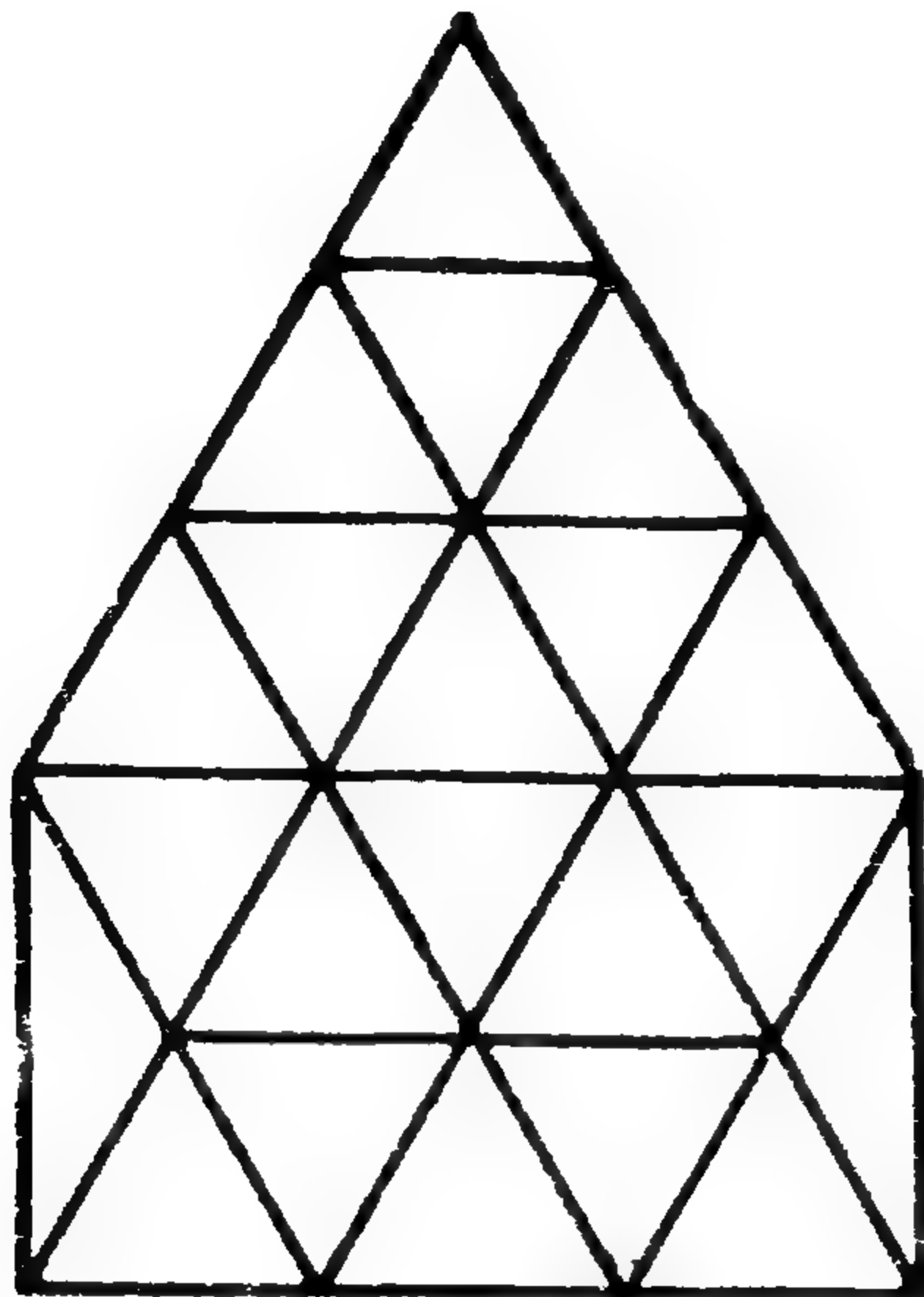
$$١٠٠٠ = (٥ + ٥) \times \frac{٥+٥}{٥} \times (٥ - ٥٥) (٣)$$

$$١٠٠٠ = \left(\frac{٥+٥}{٥}\right) \times (٥٥ - ٥٥٥) (٤)$$

حاول أن تجد حلول أخرى .



١٩ - في الشكل المرفق حاول أن تعرف عدد المثلثات التي يتكون منها الشكل .

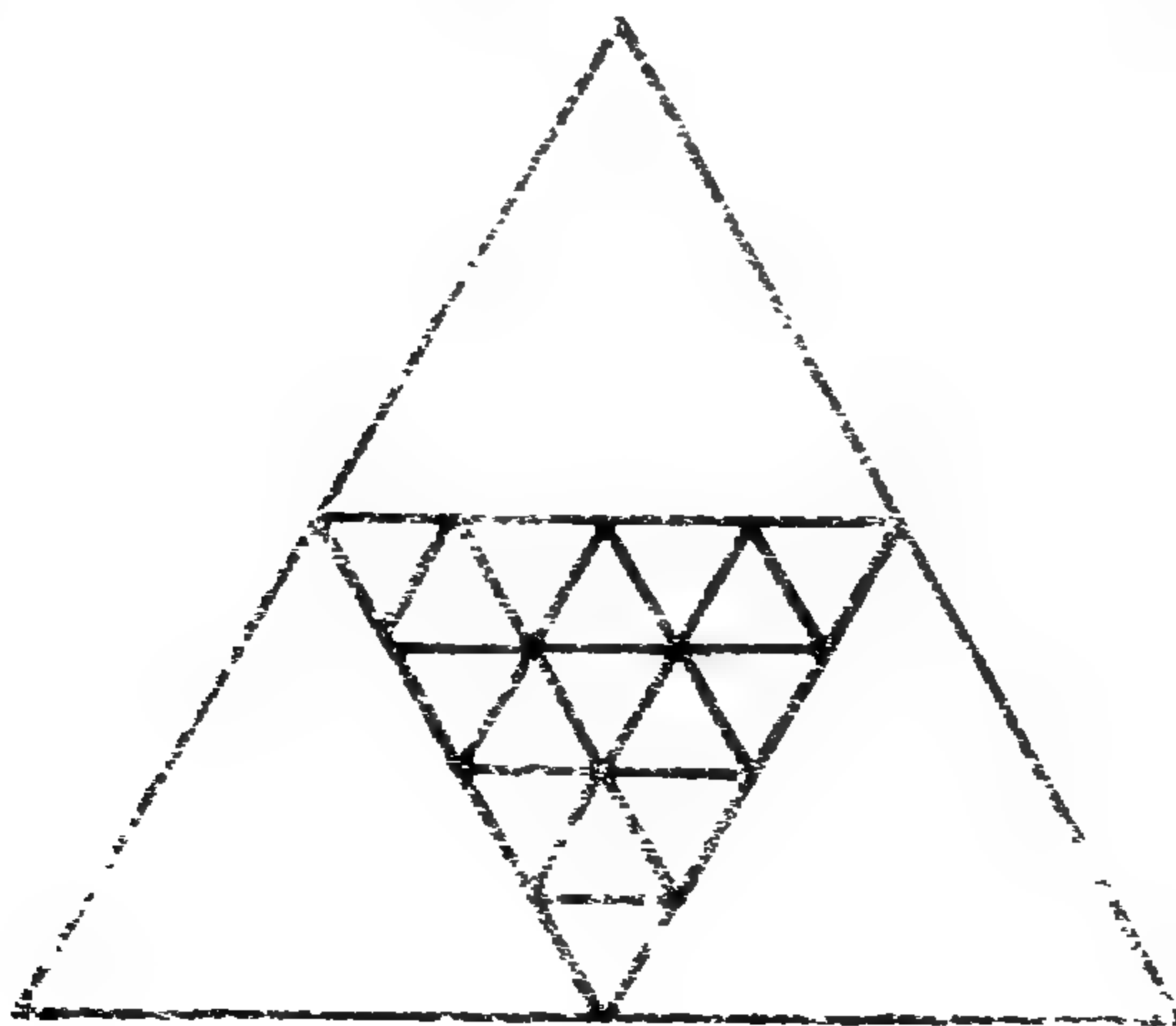


الحل :

رقم المثلثات المرسومة أمامك فهي تُسهل لك الحل كثيراً وستجد أن العدد يزيد عن ٣٦ مثلاً .



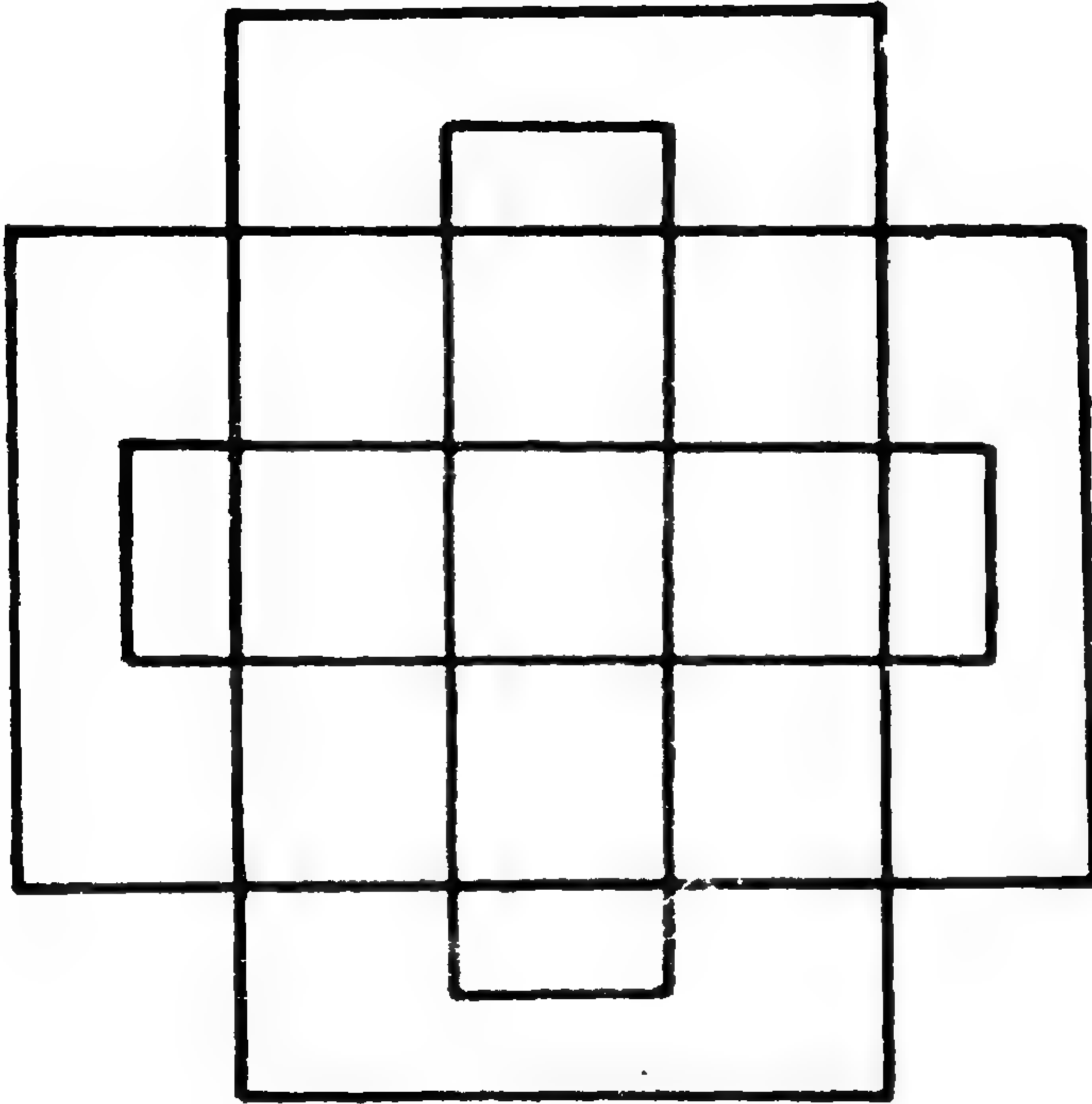
٢٠ - في الشكل المرفق مطلوب معرفة عدد المثلثات التي يتكون منها الشكل .



الحل :
الحل يزيد عن ٣٠ مثلاً .

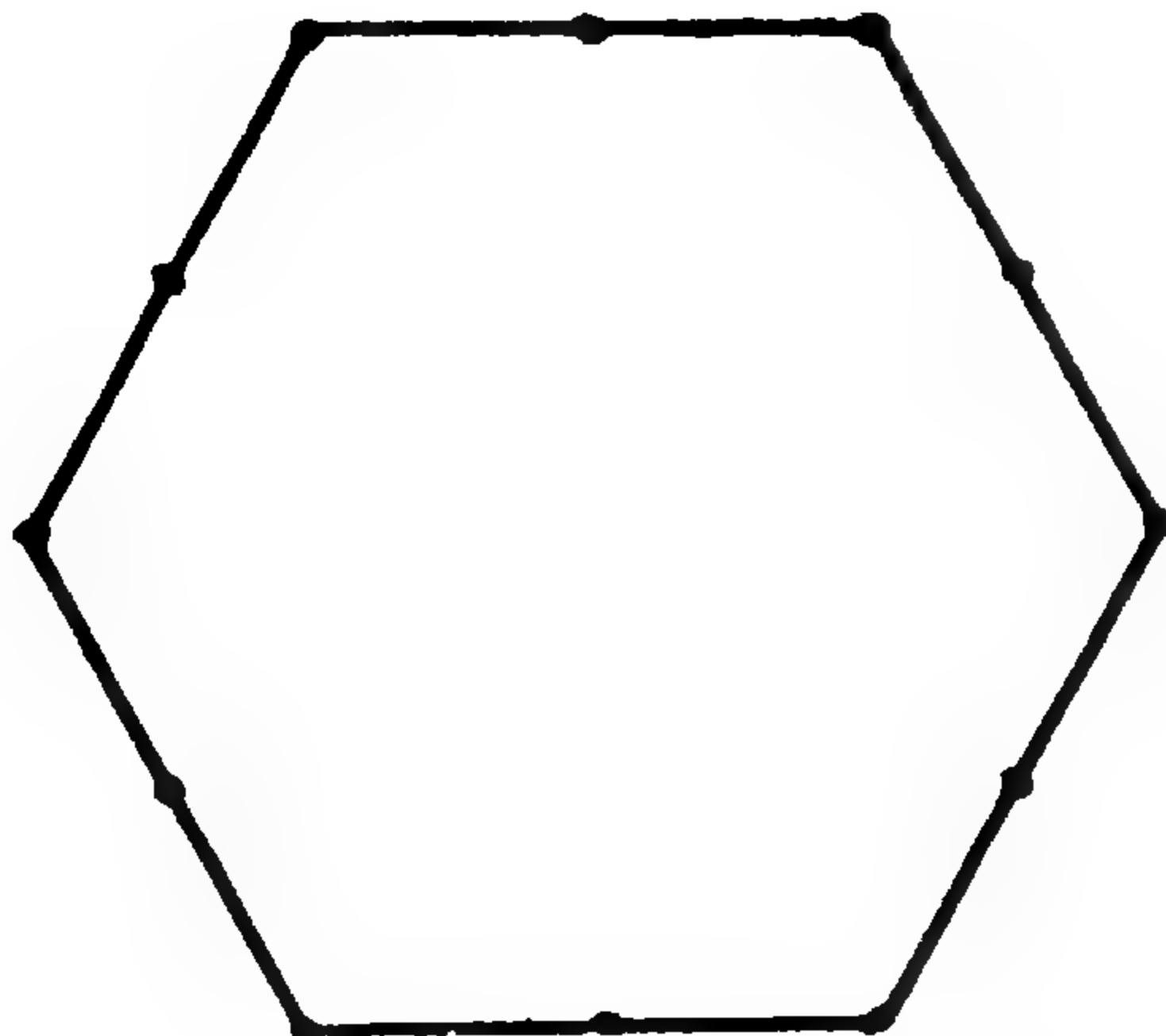


٢١ - في الشكل المرفق مطلوب معرفة عدد المستطيلات المكونة لهذا الشكل .

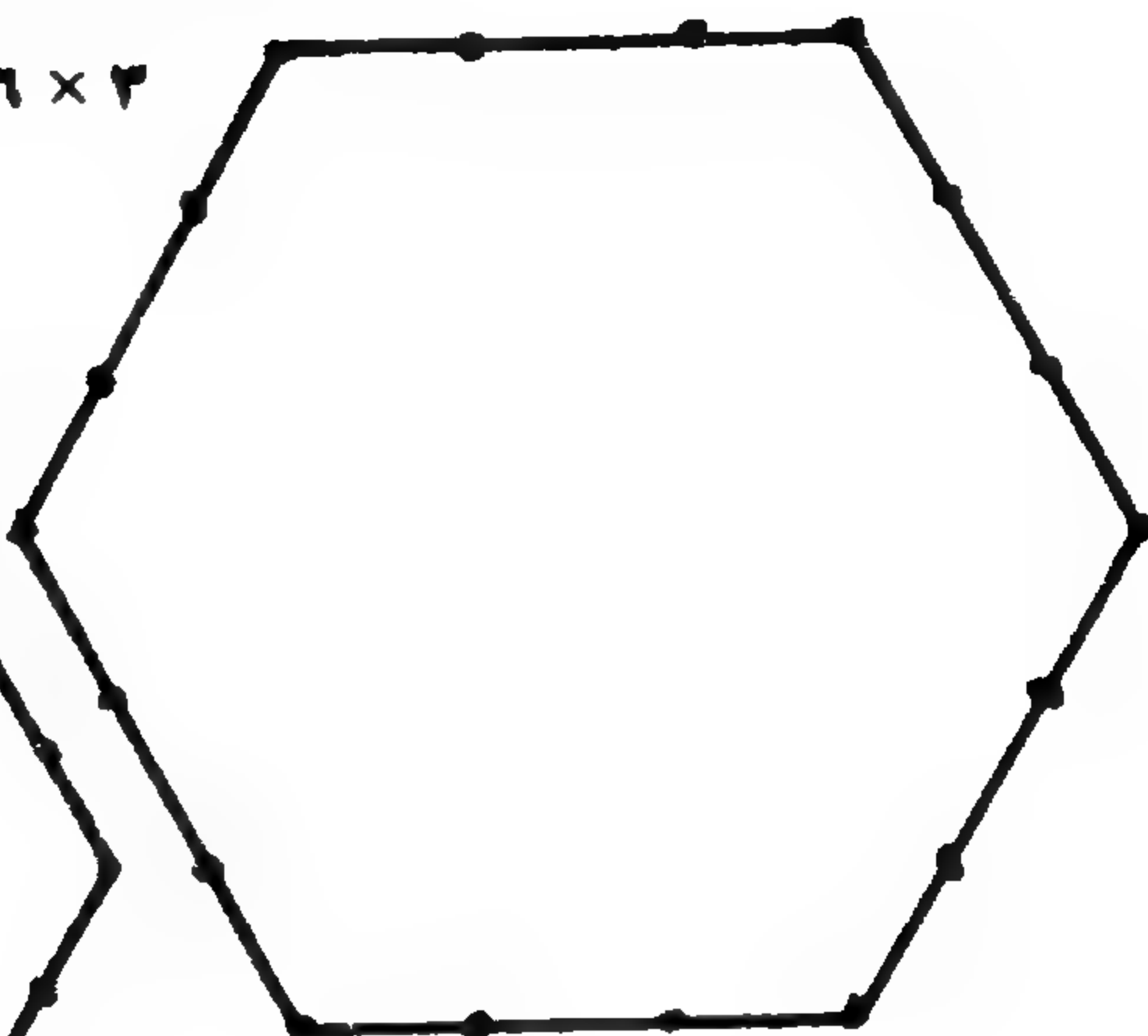


٢٢ - كيف يمكنك ترتيب (رص) ١٢ شخصاً في ستة صفوف كل صف به ثلاثة أشخاص .
الحل :

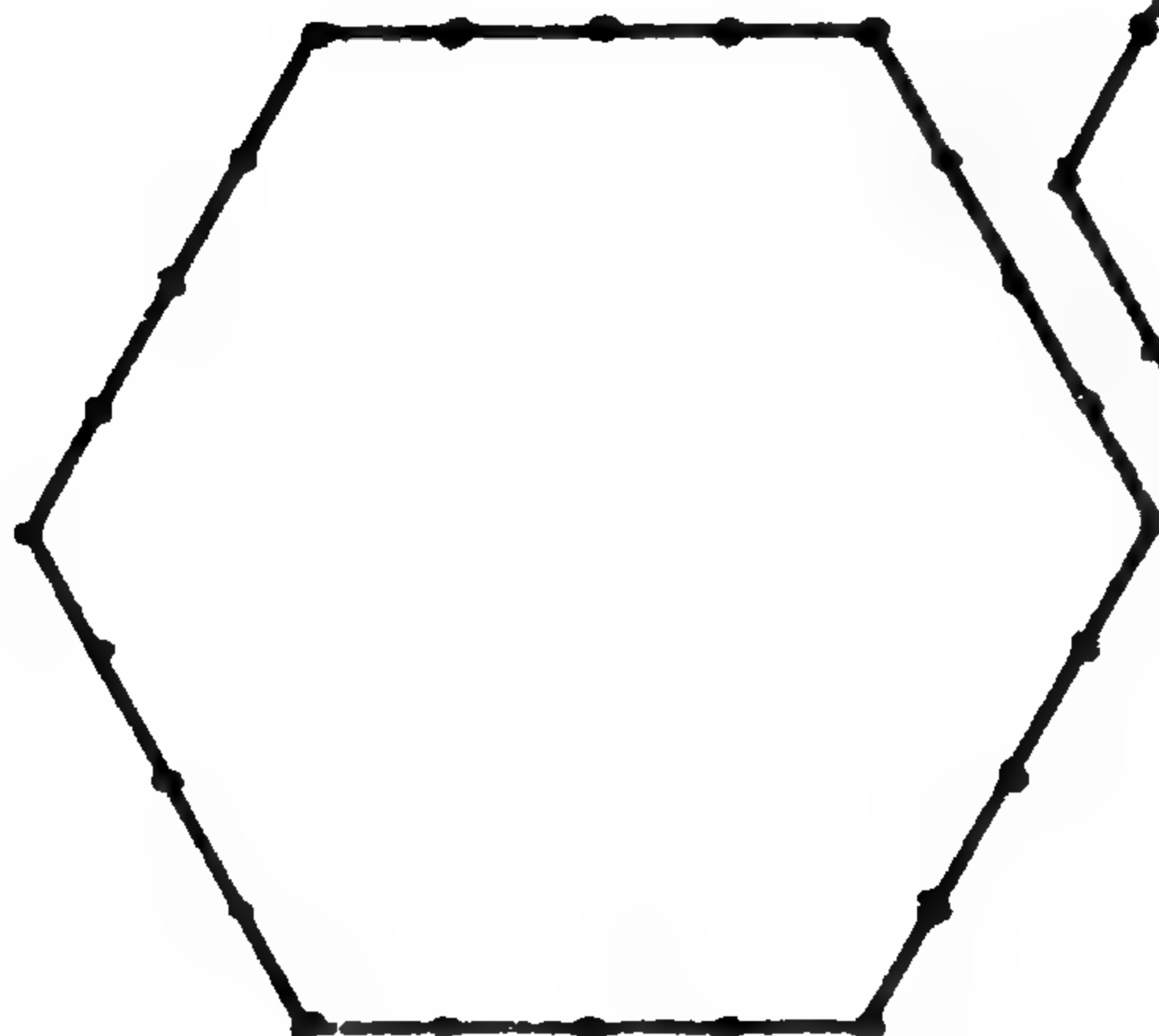
لأول وهلة يبدو الأمر مستحيلاً فالسته صفوف التي يتكون كل منها من ثلاثة أشخاص يكون العدد الكلي بها ١٨ شخصاً وليس ١٢ ولكن بإمعان التفكير وبقليل من الحيلة يمكن ترتيبهم كما بالشكل .



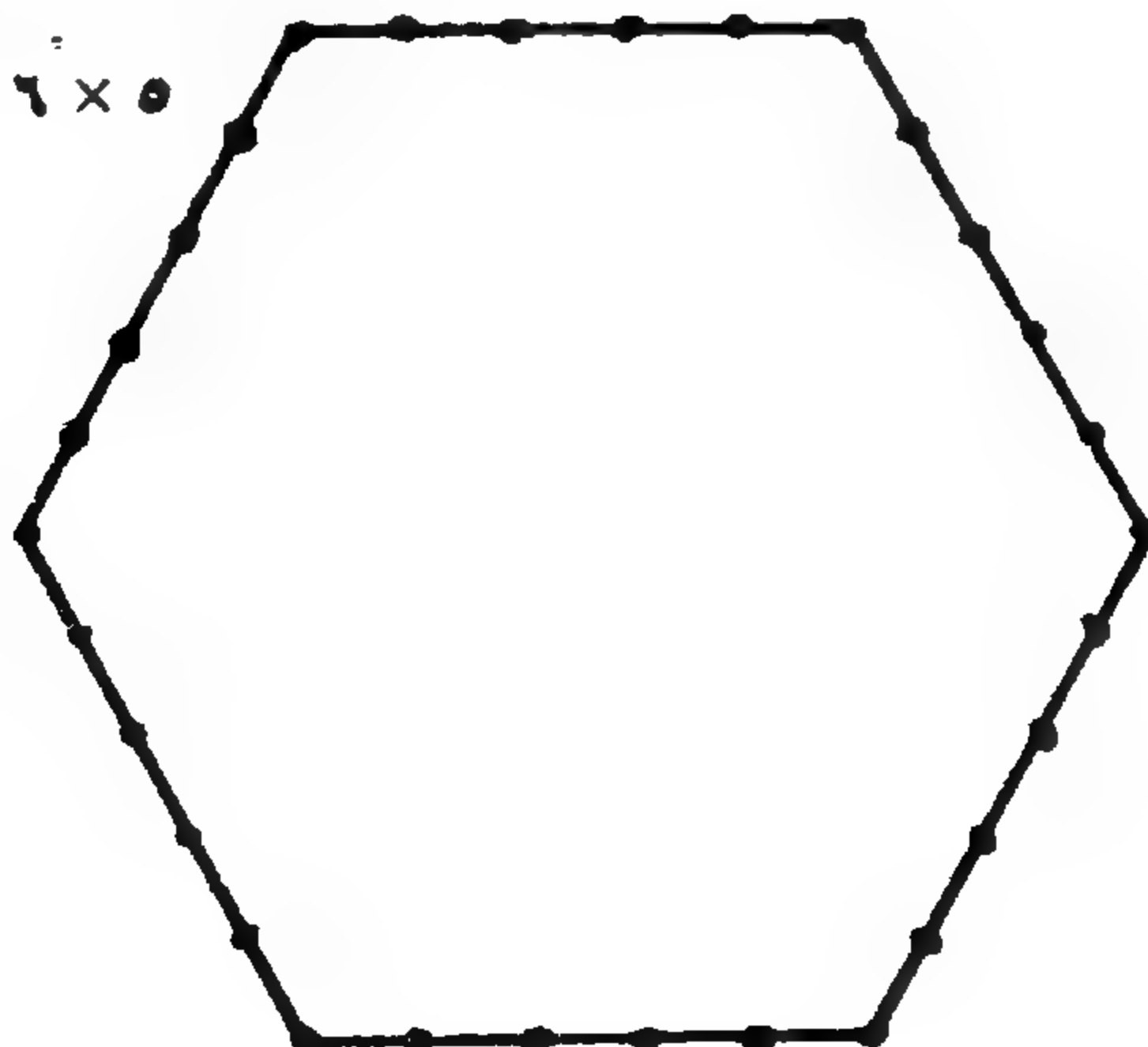
$$12 = 6 \times 2$$



$$18 = 6 \times 3$$



$$24 = 6 \times 4$$



$$30 = 6 \times 5$$

وبالمثل فإنه يمكننا عمل الترتيبات الآتية :

- ١ - ١٨ شخصاً في ستة صفوف كل صف به أربعة أشخاص .
- ٢ - ٢٤ شخصاً في ستة صفوف كل صف به خمسة أشخاص .
- ٣ - ٣٠ شخصاً في ستة صفوف كل صف به ستة أشخاص .

كما بالرسوم المرفقة :

يلاحظ في كل الأمثلة السابقة الآتي :

$$٦ = ٣٠ - ٢٤ ، ٦ = ٢٤ - ١٨ ، ٦ = ١٨ - ١٢ ، ٦ = ١٢ - ٦$$

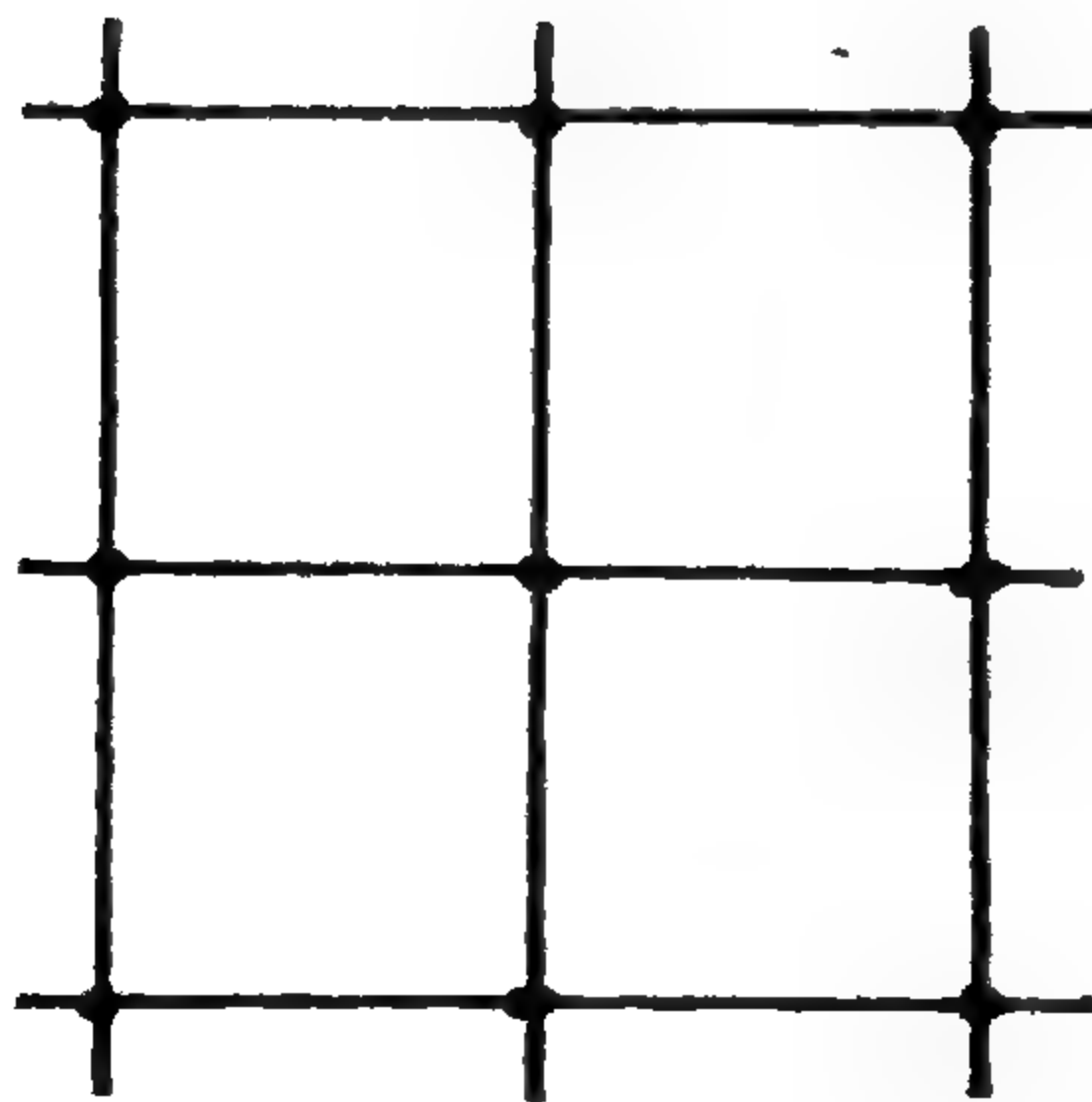
ورقم ٦ هذا يمثل رؤوس المسدس فعند كل رأس من رؤوس المسدس هنالك شخص يتم حسابه مرتان وفي هذه النقطة يكمن حل المسألة .



٢٣ - كيف يمكنك رص تسعة أشخاص في ستة صفوف كل صف به ٣ أشخاص .

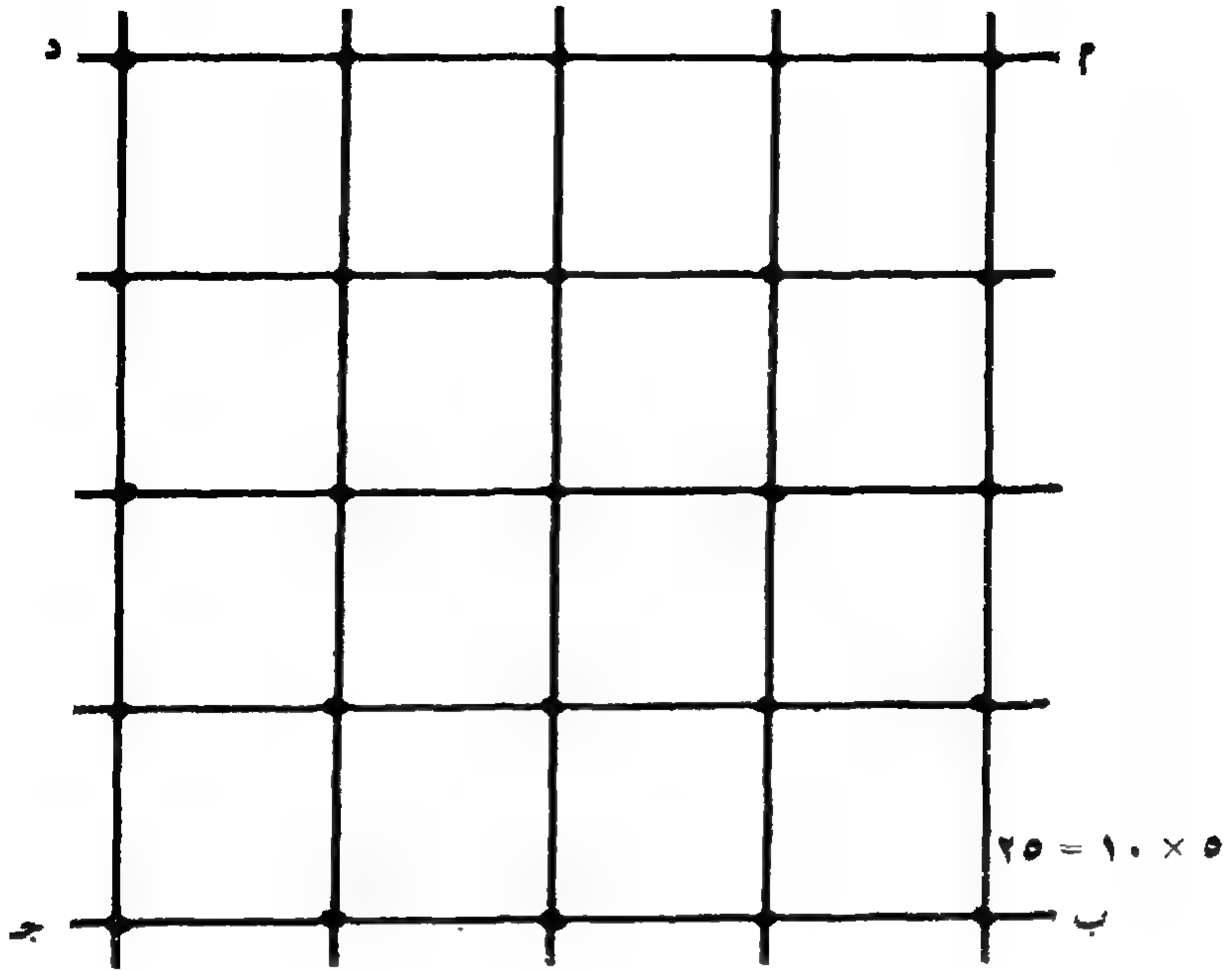
◀ الحل :

يكون الحل كما بالشكل المرفق .



$$٩ = ٣ \times ٣$$

وبنفس الفكرة يمكن رص ٢٥ شخصاً في عشرة صفوف كل صف به خمسة أشخاص ، وكذلك رص ١٦ شخصاً في ثمانية صفوف كل صف به ٤ أشخاص .



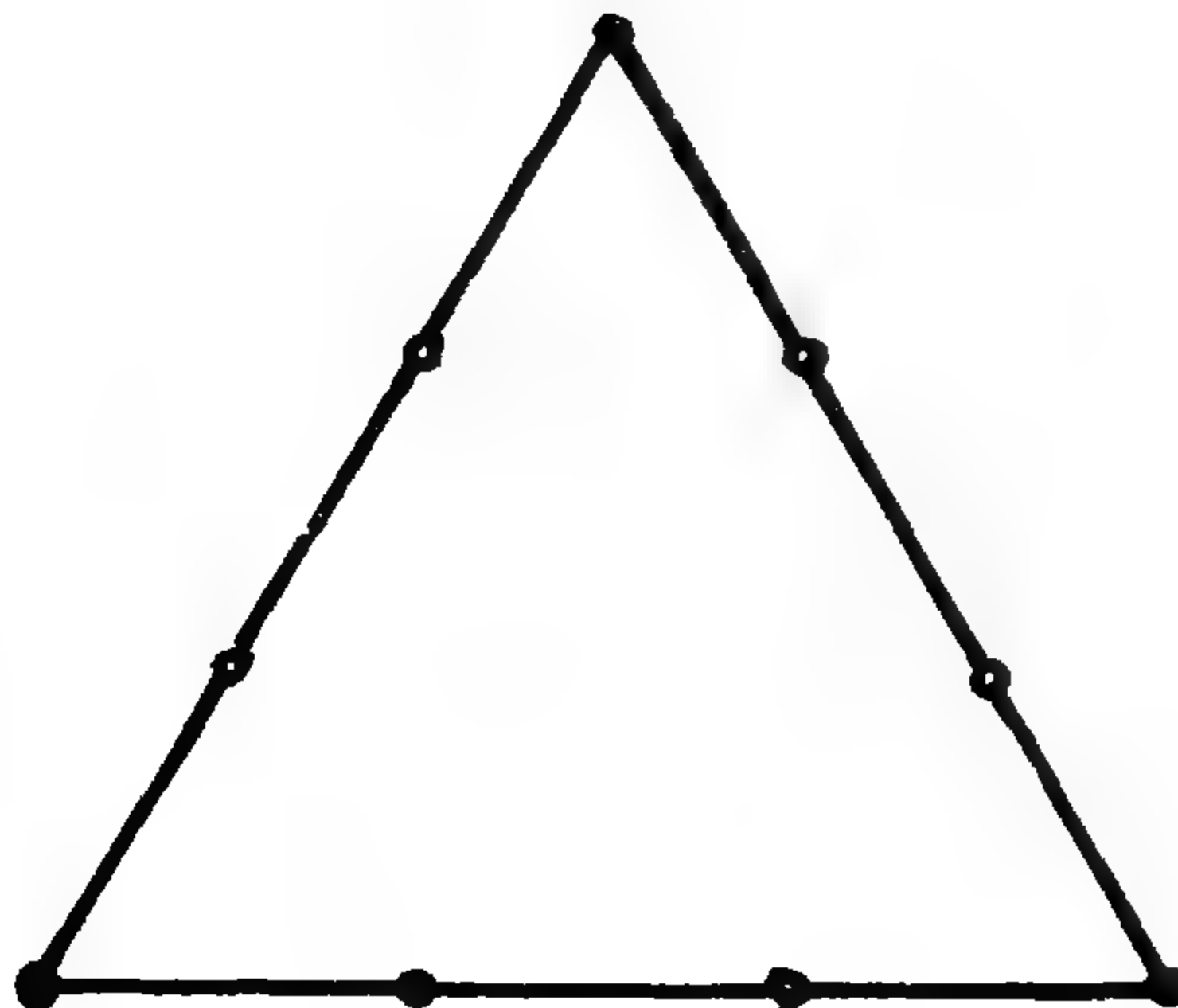
ومن الشكل الموضح (١٠ × ٥) يمكنك أن ترى حالة ١٦ شخصاً في ثمانية صفوف كل صف به ٤ أشخاص (المربع ا ب ج د)



٢٤ - كيف يمكنك رص تسعة أشخاص في ثلاثة صفوف كل صف به ٤ أشخاص .

الحل :

بسيطة كما هو موضح بالرسم .



$$٩ = ٣ \times ٣$$

◀ أيهما أكبر :

المطلوب معرفة أيهما أكبر :

أم $\sqrt[3]{2}$ وبدون استعمال آلات حاسبة وبدون حساب قيم الجذور

◀ الحل :

نلاحظ أن المضاعف المشترك لـ ٣ ، ٢ هو ٦ :

وعلى ذلك فيرفع كلا الطرفين للأس السادس أى للقوة السادسة .

$$\therefore (\sqrt[3]{2})^6 = 2^2 = 4 \quad \text{و} \quad (\sqrt[2]{3})^6 = 3^3 = 27$$

$$، \quad (\sqrt[2]{2})^6 = 2^3 = 8 \quad \text{و} \quad (\sqrt[3]{3})^6 = 3^2 = 9$$

ولما كانت $9 < 27$ فإن $8 < 27$ ،

وبالتالى فإن $\sqrt[3]{2} < \sqrt[2]{3}$

◀ أيهما أكبر :

المطلوب معرفة أيهما أكبر :

أم $\sqrt[4]{14}$ ، بدون حساب قيم الجذور

◀ الحل :

$$\sqrt[4]{14} = (\sqrt[4]{14})^4 = 14 \quad \text{و} \quad \sqrt[2]{7} = (\sqrt[2]{7})^2 = 7$$

ويرفع كلا من المقدارين إلى القوة الرابعة .

$$\therefore 7 \times 7 = 49 = (\sqrt[2]{7})^4 \quad \text{و} \quad 14 \times 2 = 28 = (\sqrt[4]{14})^4$$

$$، \quad 7 \times 7 = 49 = (\sqrt[2]{7})^4 \quad \text{و} \quad 14 \times 2 = 28 = (\sqrt[4]{14})^4$$

وحيث أنه : 7×7 أكبر من 14×2 ،

عليه يكون $\sqrt[2]{7}$ أكبر من $\sqrt[4]{14}$

وبنفس الطريقة نجد أن $\sqrt[2]{7}$ أكبر من $\sqrt[3]{27}$

حيث أنه يرفع كلا من المقدارين إلى القوة السادسة :

$$\therefore 7 \times 7 \times 7 = 343 = (\sqrt[2]{7})^6 \quad \text{و} \quad 27 \times 27 = 729 = (\sqrt[3]{27})^6$$

$$2 \times 2 \times 7 \times 7 = 196 = 14^2 = \left[\sqrt[2]{196} \right]^2 ,$$

∴ ٧ أكبر من ٢ × ٢ فعليه يكون $\sqrt[2]{196}$ أكبر من $\sqrt[2]{14}$

◀ أيهما أكبر :

المطلوب معرفة أيهما أكبر : $\sqrt[2]{4}$ أم $\sqrt[9]{8}$

◀ الحل :

$$\sqrt[5]{(4)} = \sqrt[5]{4}$$

$$\sqrt[9]{(8)} = \sqrt[9]{8}$$

برفع كلا المقدارين للقوة الخامسة والأربعين (أس ٤٥)

$$\therefore \left[\sqrt[5]{(4)} \right]^{45} = 4^9 = 262144 = 512 \times 512 = 92 \times 92 = 9(2 \times 2) = 94 = 4^9$$

$$, \left[\sqrt[9]{(8)} \right]^{45} = 8^5 = 32768 = 28 \times 28 = 58 = 4^9$$

وواضح أن المقدار الأول أكبر من الثاني بالنسبة $\frac{512}{64}$

أي ثمانية أضعاف ∴ $\sqrt[9]{8} < \sqrt[4]{4}$

◀ أيهما أكبر :

المطلوب معرفة أي المقدارين التاليين أكبر :

$$(\sqrt[5]{10} + \sqrt[5]{5}) \text{ أم } (\sqrt[5]{7} + \sqrt[5]{8})$$

وذلك بدون استعمال لوغاريتمات أو آلات حاسبة لإيجاد قيم الجذور .

◀ الحل :

نرفع كلا من المقدارين إلى القوة الثانية :

$$\therefore (\sqrt[5]{10} + \sqrt[5]{5})^2 = 2(\sqrt[5]{10} + \sqrt[5]{5})$$

$$= 10 + 2\sqrt[5]{50} + 5 = 15 + 2\sqrt[5]{50}$$

$$, (\sqrt[5]{7} + \sqrt[5]{8})^2 = 2(\sqrt[5]{7} + \sqrt[5]{8})$$

$$= 10 + 2\sqrt[5]{56} + 14 = 24 + 2\sqrt[5]{56}$$

ولما كان من البديهي أن $\sqrt{14}$ أكبر من $\sqrt{12,5}$
 $\therefore (\sqrt{7} + \sqrt{8})$ أكبر من $(\sqrt{10} + \sqrt{5})$
بمجرد النظر :

أوجد قيمة s في المقدار الآتي بمجرد النظر : $s^6 = 6$
الحل :

إذا وضعنا $s^6 = v$
 $\therefore s = \sqrt[6]{v}$

وعليه فإن المقدار يصبح : $6 = [\sqrt[6]{v}(\sqrt[6]{v})^5]$

$$\therefore 6 = (\sqrt[6]{v})(\sqrt[6]{v})^5$$

$$\therefore 6 = \sqrt[6]{v}$$

$$\therefore 6 = \sqrt[6]{v}$$

وبرفع كلا الطرفين للقوة السادسة :

$$\therefore 6^6 = (\sqrt[6]{v})^6$$

$$\therefore 6^6 = v$$

ومنها $v = 6^6$

وحيث أن $s = \sqrt[6]{v}$

$$\therefore s = \sqrt[6]{6^6}$$

وكذلك إذا كانت $s^9 = 9$ فإن $s = \sqrt[9]{9}$

، وكذلك إذا كانت $s^7 = 7$ فإن $s = \sqrt[7]{7}$

وذلك بمجرد النظر ..

بمجرد النظر :

أوجد قيمة s في المقدار الآتي بمجرد النظر : $s^8 = 8$

المحل :-

نضع من ۴ = ص

س = √ص

المقدار يمكن كتابته كالتالي : $\xi = [(\overline{\xi_1}) (\overline{\xi_2})^T]$

$$z = \left(\frac{1}{4}\text{ms}\right)\left(\frac{1}{4}\text{ms}\right) \therefore$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$z = \frac{1}{z} \cdot z$$

ويرفع كلا الطرفين للقوة الرابعة :

$$z = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

∴ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

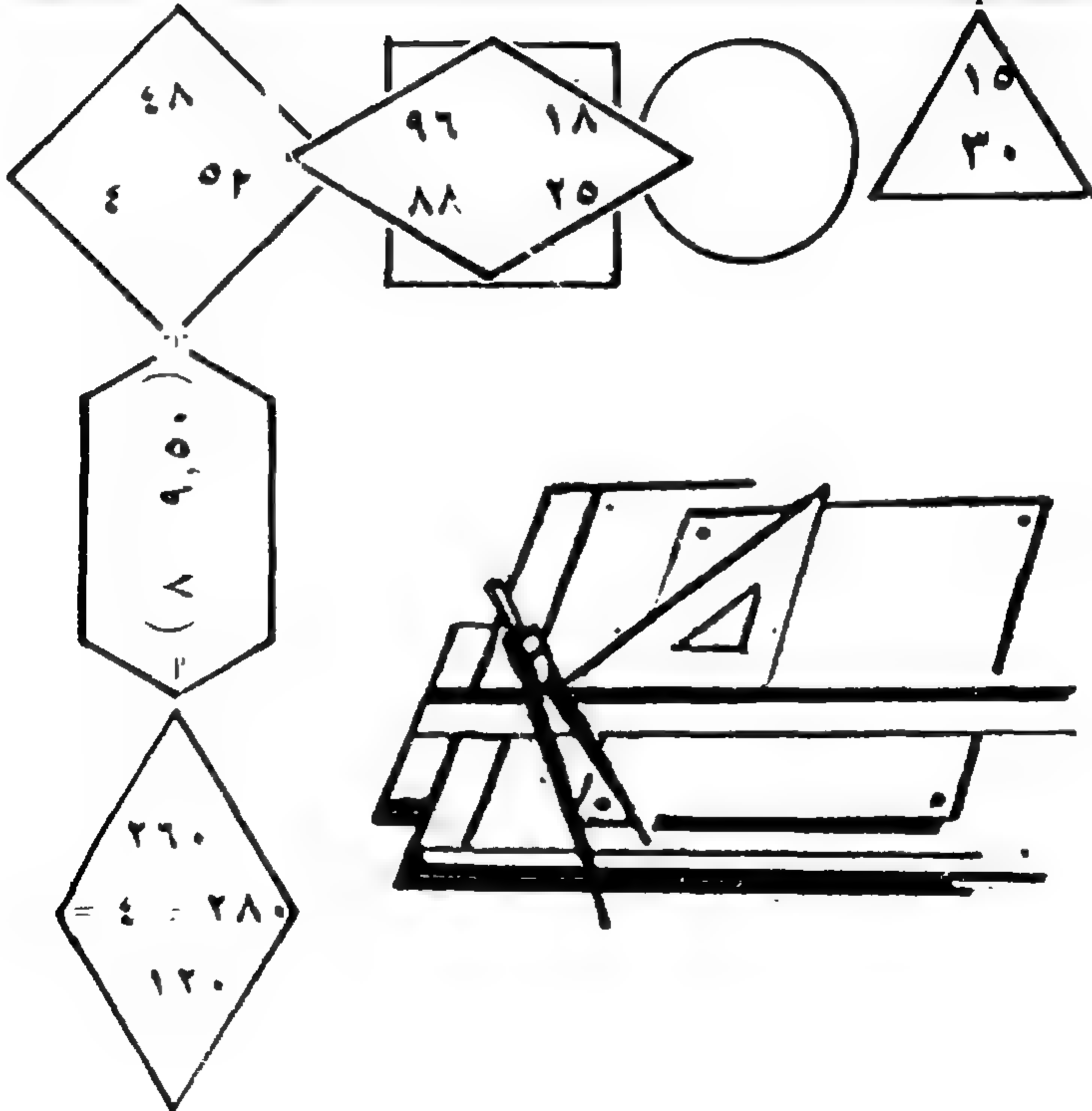
ومنها ص = ٤

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2}4 = \sqrt[2]{4} = \sqrt[4]{16} = \dots$$



الباب الثاني

عمليات مفيدة مع الأرقام



◀ عمليات الضرب السريعة :

تقتضى الظروف أحياناً إجراء عمليات ضرب الأرقام وبدون استعمال آلات حاسبة وتفيد الرياضيات كثيراً في هذا .

فمثلاً إذا أردنا إيجاد :

$${}^2(0,99) ، {}^2(28) ، {}^2(253) ، {}^2(297) \text{ مثلاً}$$

فإننا نقول :

$$\text{نعتبر } {}^2(28) = {}^2(28 - 1) + {}^2(1)$$

$$= {}^2(27) + {}^2(1)$$

وعلى هذا فإن :

$${}^2(0,99) = {}^2(0,99 - 0,01) + {}^2(0,01)$$

$$= {}^2(0,98) + {}^2(0,01)$$

$$= 0,9801 + 0,0001 = 0,9801$$

$${}^2(28) = {}^2(28 - 2) + {}^2(2)$$

$$= {}^2(26) + 4$$

$$= 780 + 4 = 784$$

$${}^2(253) = {}^2(253 - 3) + {}^2(3)$$

$$= {}^2(250) + 9$$

$$= 2500 + 9 = 2509$$

$${}^2(297) = {}^2(297 - 3) + {}^2(3)$$

$$= {}^2(294) + 9$$

$$= 2940 + 9 = 2949$$

$${}^2(219) = {}^2(219 - 18) + {}^2(18)$$

$$= {}^2(201) + 36$$

$$= 2010 + 36 = 2046$$

، وهكذا

١ - أوجد قيمة 998×993 بطريقة الضرب السريع .

◀ الحل :

الحل يكون كالتالى :

$$\begin{aligned}(2 - 1000)(7 - 1000) &= 998 \times 993 \\ 2 \times 7 + 2 \times 1000 - 7 \times 1000 - 1000 \times 1000 &= \\ 2 + 7 + 2 \times 1000 - (7 - 1000) 1000 &= \\ 2 \times 7 + 2 \times 1000 - 993 \times 1000 &= \\ 2 \times 7 + (2 - 993) 1000 &= \\ 991014 = 14 + 991 \times 1000 &= \\ \text{أى أن :} &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \times 7 + 1000 \times (2 - 993) &= 998 \times 993 \\ = (\text{الرقم الأول} - \text{الفرق بين الألف والرقم الثانى}) \times 1000 + \text{فرق الرقم} \\ \text{الأول عن الألف مضروباً فى فرق الرقم الثانى عن الألف} . &\end{aligned}$$

وعليه فإن قيمة 987×995 بالضرب السريع

$$\begin{aligned}13 \times 5 + 1000 \times (13 - 995) &= \\ 982065 = 65 + 982000 &= \end{aligned}$$

، قيمة 997×986 بالضرب السريع

$$\begin{aligned}3 \times 14 + 1000 \times (3 - 986) &= \\ 983042 = 42 + 983000 &= \text{وهكذا} .. \end{aligned}$$



٢ - أوجد قيمة 89×97 ، 93×87 بطريقة الضرب السريع .

◀ الحل :

بنفس الطريقة كما سبق :

$$11 \times 3 + 100 \times (11 - 97) = 89 \times 97$$

(الضرب هنا فى ١٠٠ وليس فى ١٠٠٠)

$$٨٦٣٣ = ٣٣ + ٨٦٠٠ =$$

$$٧ \times ١٣ + ١٠٠ \times (٧ - ٨٧) = ٩٣ \times ٨٧$$

$$٨٠٩١ = ٩١ + ٨٠٠٠ =$$



٣ - كيف يمكنك ضرب عددين كل منهما من ثلاثة خانات [آحاد وعشرات ومئات] فيهما خانة العشرات واحدة (متساوية) ومجموع خانتى الآحاد في كليهما = ١٠ وكمثال :

$$٩٨٣ \times ٩٨٧ \text{ ، كذلك } ٦٢٦ \times ٦٢٤$$

الحل :

بالنسبة للمطلوب الأول :

رقمى العشرات والمئات واحد وهو (٦٢) ومجموع رقمى الآحاد فى العددين هو $٦ + ٤ = ١٠$ ،

وعلى ذلك فإن حل هذه العملية يكون كالتالى :

نضرب العددين المكونين من رقمى العشرات والمئات فى العددين التالين هما ، أى ٦٢ فى العدد الذى يليه أى ٦٣ كالآتى :

$$\text{نضرب } ٦٢ \times ٦٣ = ٣٩٠٦$$

ثم نضرب رقمى الآحاد فى العدد الأول فى رقم الآحاد فى العدد الثانى ، أى :

$$\text{نضرب } ٦ \times ٤ = ٢٤$$

$$\text{فيكون ناتج الضرب النهائى } = ٣٩٠٦٢٤$$

$$\text{وكذلك فى } ٩٨٣ \times ٩٨٧$$

$$\text{نضرب } ٩٨ \times ٩٩ = ٩٧٠٢ \text{ [هو العدد الذى يلى ٩٨]}$$

$$\text{ثم نضرب } ٧ \times ٣ = ٢١$$

$$\text{ناتج الضرب النهائى } = ٩٧٠٢٢١ \text{ ، وهكذا}$$

وتفسير هذه الطريقة السهلة نأخذ العددين ٩٨٣×٩٨٧ كمثال

$$(٣ + ٩٨٠) (٧ + ٩٨٠) = ٩٨٣ \times ٩٨٧$$

$$= ٣ \times ٧ + ٩٨٠ \times ٣ + ٩٨٠ \times ٧ + ٩٨٠ \times ٩٨٠$$

$$3 \times 7 + 10 \times 980 + 980 \times 980 =$$

$$3 \times 7 + 990 \times 980 =$$

$$[98 \text{ هو العدد الذى يلي } 99] 3 \times 7 + 100 \times (99 \times 98) =$$

$$970221 = 21 + 970200 =$$

ويمكن إيجاد قيمة 983×987 بطريقة أخرى كالتالى :

$$(2 - 985) (2 + 985) = 983 \times 987$$

$$22 - 2985 =$$

$$970221 = 4 - 970225 =$$

ولسهولة إيجاد 2985 فإننا يجب أن نتعرض لطريقة سريعة لتربيع الأعداد

المنتهية برقم 5 (رقم الآحاد = 5)

كما فى المسألة التالية .



٤ - أوجد قيمة ٢٩٥ ، ٢٧٥ ، ٢٦٥ ، ٢١٥

◀ الحل :

$$9025 = 100 \times (10 \times 9) + 25 = 295$$

$$5625 = 100 \times (8 \times 7) + 25 = 275 ،$$

$$4225 = 100 \times (7 \times 6) + 25 = 265 ،$$

$$225 = 100 \times (2 \times 1) + 25 = 215 ،$$

والطريقة هى : ضرب رقم العشرات فى الرقم الذى يليه مباشرة $\times 100$ ثم

نضيف 25 للمجموع .

وفى ما يلي إثبات هذه الطريقة :

أى عدد يتكون من خاتين (آحاد وعشرات) يمكننا وضعه كالتالى :

$$10 \times \text{ب} + \text{ا} \quad (\text{ا رقم الآحاد ، ب رقم العشرات})$$

$$\text{فمثلاً } 95 = 10 \times 9 + 5$$

$$\text{وبالتربيع : } \therefore (10 \times \text{ب} + \text{ا})^2 = 100 \times \text{ب}^2 + 20 \times \text{ا} \text{ب}$$

$$٩ = ب ، ٥ = ا .\therefore ،$$

$$٢٥ = (١٠ + ب)٢ = ١٠٠ + ٢٠ب + ب٢$$

$$٢٥ + ١٠٠ب + ١٠٠ = (ب + ١)٢$$

$$٢٥ + ١٠٠ب + ١٠٠ = ١٠٠ + ٢٠ب + ب٢$$

$$٢٥ = رقم العشرات \times الرقم الذى يليه \times ١٠٠$$

$$٢٥ = ١٠ \times ٩ \times ١٠٠ + ٢٥$$

$$٩٠٢٥ =$$

ويمكن الاستفادة من الطريقة السابقة فى إيجاد مربع أى عدد من خانة واحدة أو خانتين (آحاد وعشرات) وينتهى بكسر (نصف) كما فى المسألة التالية .



٥ - أوجد قيمة المقادير الآتية :

$$٢٩٧,٥ ، ٢١٩,٥ ، ٢١١,٥ ، ٢٩,٥ ، ٢٦,٥$$

◀ الحل :

إذا نظرنا للمسألة السابقة نجد أنه بنفس الفكرة :

$$٢٦,٥ = ٢٠,٥ + ٦ \times ٧ = ٢٠,٥ + ٤٢ = ٤٢,٢٥$$

$$٢٩,٥ = ٢٠,٥ + ٩ \times ١٠ = ٢٠,٥ + ٩٠ = ١١٠,٢٥$$

$$٢١١,٥ = ٢٠,٥ + ١١ \times ١٢ = ٢٠,٥ + ١٣٢ = ١٣٢,٢٥$$

$$٢١٩,٥ = ٢٠,٥ + ١٩ \times ٢٠ = ٢٠,٥ + ٣٨٠ = ٣٨٠,٢٥$$

$$٢٩٧,٥ = ٢٠,٥ + ٩٧ \times ٩٨ = ٢٠,٥ + ٩٥٠٦ = ٩٥٠٦,٢٥$$



٦ - لدينا ثلاث مزارع مزروعة برسيم خاص بتربية البقر والبرسيم المنزوع

بنفس الكثافة ونفس معدل النمو ،

الأولى مساحتها ١٠ أفدنة .

والثانية مساحتها ٣٠ فداناً

والثالثة مساحتها ٧٢ فداناً

فإذا كانت مساحة البرسيم المنزرعة بالمرزعة الأولى تكفى لتغذية ٣٦ بقرة لمدة ٤ أسابيع متصلة .

والمرزعة الثانية تكفى لتغذية ٦٣ بقرة لمدة ٩ أسابيع .

والمطلوب هو معرفة كم بقرة يمكنها أن تتغذى على المساحة المنزرعة بالمرزعة الثالثة لمدة ١٨ أسبوع متصلة .

◀ الحل :

ملاحظة : عندما يأكل البقر البرسيم فإن البرسيم يعود للنمو مرة ثانية ،
والآن :

نفرض أن ص = مقدار الزيادة في كمية البرسيم الناشئ من عودته للنمو في
الفدان الواحد في الأسبوع الواحد .
وعلى هذا :

ففى الأسبوع الواحد فى المزرعة الأولى ، يزداد نمو البرسيم بمقدار ١٠ ص .
وفى أربعة أسابيع بمقدار = ١٠ ص × ٤ = ٤٠ ص
وهذا لو أننا إعتبرنا أن مساحة المزرعة الأولى إزدادت وأصبحت
(١٠ + ٤٠ ص) فدان [أو كمية برسيم]

وفى أسبوع واحد فإن ٣٦ بقرة تستهلك $\frac{1}{4}$ هذه الكمية أو هذه المساحة
وبالتالى فإن بقرة واحدة تستهلك فى الأسبوع الواحد من المزرعة الأولى

$$\frac{1}{144} = \frac{1}{36} \times \frac{1}{4} = \text{من هذه الكمية}$$

أى ما يعادل $\frac{10 + 40 \text{ ص}}{144}$ فداناً (١)

وبنفس الطريقة فإننا نوجد المساحة التى تكفى لتغذية بقرة واحدة خلال
أسبوع واحد من المزرعة الثانية كالتالى :

نمو البرسيم في خلال إسبوع واحد في الفدان الواحد = ص (نفس المعدل للمزرعة الأولى)

∴ نمو البرسيم في خلال ٩ أسابيع في الفدان الواحد = ٩ ص

∴ نمو البرسيم في خلال ٩ أسابيع في ٣٠ فدان = ٢٧٠ ص

وبالتالى فإن المساحة الفعلية التى استخدمت في تغذية ٦٣ بقرة في خلال ٩

أسابيع = ٣٠ + ٢٧٠ ص

∴ فالمساحة اللازمة لتغذية بقرة واحدة لمدة إسبوع واحد من المزرعة الثانية

$$= \frac{٣٠ + ٢٧٠ \text{ ص}}{٩ \times ٦٣} \text{ فداناً} \quad (٢) \dots\dots\dots$$

ولكن (١) = (٢)

[باعتبار أن البقرة من هذا النوع تتغذى في الأسبوع الواحد بكمية ثابتة]

$$\therefore \frac{٣٠ + ٢٧٠ \text{ ص}}{٩ \times ٦٣} = \frac{١٠ + ٤٠ \text{ ص}}{١٤٤}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{١}{١٢} \quad (٣) \dots\dots\dots$$

وبالتعويض عن قيمة ص من المعادلة (٣) في أى من المعادلتين (١) أو (٢)

نحصل على كمية البرسيم اللازمة لتغذية بقرة واحدة لمدة أسبوع واحد :

فبالتعويض في المعادلة (١) :

$$\therefore \text{المساحة (الكمية)} = \frac{\frac{١}{١٢} \times ٤٠ + ١٠}{١٤٤}$$

$$= \frac{٥}{٥٤} \text{ فداناً}$$

وبالنظر للمعادلتين (١) ، (٢) فإنه يمكن تكوين المعادلة (٤) على الوجه التالى :

$$\frac{\frac{١}{١٢} \times ١٨ \times ٧٢ + ٧٢}{١٨ \times \text{ص}} = \frac{٥}{٥٤}$$

ومنها ص = ١٠٨ بقرة .

وهى كمية البقر التى تكفيها مساحة ٧٢ فداناً لمدة ١٨ إسبوعاً للتغذية .

٧ - في أحد سباقات السيارات ، كانت هنالك ثلاث سيارات واحدة
 منهن سرعتها تقل عن سرعة الأولى ب : ٣٠ كم/ساعة .
 وفي نفس الوقت سرعتها تزيد عن الثالثة ب : ٢٠ كم / ساعة
 فإذا كانت هذه السيارة تصل إلى نهاية السباق بعد وصول السيارة
 الأولى ب $\frac{3}{4}$ ساعة (٤٥ دقيقة) وقبل السيارة الثالثة ب ٣٦ دقيقة .
 فإذا كان السباق بدون توقف فالمطلوب حساب الآتي :

- ١ - طول مسافة السباق .
- ٢ - سرعة كل من السيارات الثلاث .
- ٣ - زمن إنهاء السباق لكل من السيارات الثلاث .

◀ الحل :

هنا عدد المجاهيل سبعة ، ثلاث سرعات وثلاثة أزمنة ومسافة واحدة ، إلا
 أننا سنتبع طريقة سهلة للحصول على هذه المجاهيل
 لنفرض أن سرعة السيارة الثانية = س كم/ساعة .
 ∴ سرعة السيارة الأولى = (س + ٣٠) كم/ساعة
 ، سرعة السيارة الثالثة = (س - ٢٠) كم/ساعة
 ولنفرض أن طوال مسافة السباق = ف كيلو متر
 ∴ زمن إنهاء السباق للسيارة الأولى = $\frac{ف}{(س + ٣٠)}$ ساعة
 ، زمن إنهاء السباق للسيارة الثانية = $\frac{ف}{س}$ ساعة
 ، زمن إنهاء السباق للسيارة الثالثة = $\frac{ف}{(س - ٢٠)}$ ساعة

ولما كانت السيارة الثانية تأخذ من الوقت أكثر من السيارة الأولى بمقدار $\frac{3}{4}$
 ساعة ، لإنهاء السباق ،

$$\therefore \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س + ٣٠} = ٠,٧٥ \text{ ساعة} \dots\dots\dots (١)$$

وكذلك فإن السيارة الثانية تأخذ من الوقت أقل من السيارة الثالثة بمقدار

٣٦ دقيقة

$$(أى \frac{٣٦}{٦٠} = ٠,٦٠ \text{ ساعة}) \text{ لإنهاء السباق :}$$

$$\therefore \frac{ف}{٢٠-س} - \frac{ف}{س} = ٠,٦٠ \text{ ساعة} \quad (٢) \dots\dots\dots$$

من المعادلة (١) وبعد عدة اختصارات نصل إلى أن :

$$ف = ٠,٠٢٥ س (س + ٣٠) \quad (٣) \dots\dots\dots$$

وبالتعويض عن قيمة ف من المعادلة (٣) في المعادلة (٢) وبعد العديد من الإختصارات نحصل على قيمة س .

س = ٢٧٠ كيلومتر/ساعة وهى سرعة السيارة الثانية .

∴ سرعة السيارة الأولى = ٢٧٠ + ٣٠ = ٣٠٠ كم/ساعة

، سرعة السيارة الثالثة = ٢٧٠ - ٢٠ = ٢٥٠ كم/ساعة

وبالتعويض عن قيمة س في المعادلة (٣) :

$$\therefore ف = \frac{٢٥}{١٠٠٠} \times ٢٧٠ \times (٣٠ + ٢٧٠)$$

= ٢٠٢٥ كيلومتراً وهى مسافة السباق .

، زمن السباق للسيارة الأولى = $\frac{٢٠٢٥}{٣٠٠}$ = ٦,٧٥ ساعة

أى ٦ ساعات ، ٤٥ دقيقة .

، زمن السباق للسيارة الثانية = $\frac{٢٠٢٥}{٢٧٠}$ = ٧,٥ ساعة

أى ٧ ساعات ، ٣٠ دقيقة .

، زمن السباق للسيارة الثالثة = $\frac{٢٠٢٥}{٢٥٠}$ = ٨,١ ساعة

أى ٨ ساعات ، ٦ دقائق .

٨ - ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ٤ آحاد (أربع وحدات أى ١ ، ١ ، ١ ، ١) .

◀ الحل :

الإجابات المحتملة هي : 1×111 ، 11×11 ، 111 ،

وأكبرها بلا شك هو ١١١١ ولكننا نجد أن لدينا باستعمال الأسس

$$(11)^{11} = 285311 \times 10^6 \text{ أى ما يقرب من } 285 \text{ مليار ، } 311 \text{ مليوناً}$$

ونلاحظ أن الإجابة هنا تزيد عن (١١١١) بمقدار يعادل تقريباً ٢٥٧ مليون مرة .



٩ - ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ٤ ، ٢ ، ٢ ، ٢ (أى أربع إثنائات) .

◀ الحل :

الإجابات المحتملة هي :

$$22 + 22 ، 22 \times 22 ، 2222 ، 2(222) ، 2(22) ، 22(22) ،$$

$$2(22(2)) ، 2[2(22)] ، 2[222] ، 2[2(22)] ، 2[2(2)] ، 2[2(2(2))]$$

وهي إحدى عشرة إجابة محتملة ويلاحظ أن الإجابات الأربع الأول ذات قيم صغيرة جداً ولا تقارن بالإجابات الباقية .

$$2(222) = 29284 ،$$

$$22(22) \approx 2910 \times 3,41427 ،$$

$$222(2) \approx 6610 \times 6,73998 ،$$

$$2[2(22)] \approx 234256 .$$

$$2[22(2)] \approx 4842 = \text{عدد لا نهائى يصعب حصره}$$

$$2[2(2(2))] \approx 4194304(2) = \text{عدد لا نهائى يصعب حصره أكبر من السابق}$$

$$2(2(2(2))) \approx 65536 \text{ تقريباً} .$$

وواضح من التحليل السابق أن أكبر الإجابات قاطبة هي $^{22}[^2(2)]$ وهو يعادل تقريبا ٢ مرفوعة لأس مقداره يزيد عن ٤ مليون وهو يزيد عن ناتج (١٠) ١,٢٦٢,٦١١ أى يزيد عن عشرة وأمامها ما يزيد عن مليون ومائتين إثنان وستون صفراً وهو رقم خرافى بالطبع [لاحظ أن ٢٢٢ أكبر من ٢٢٢]



١٠ - ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ثلاث إثنانات (٢ ، ٢ ، ٢) ، ثلاث ثلاثات .

◀ الحل :

الإجابات المحتملة هي :

$$^{22}[^2(2)] ، ^{22}[2] ، ^2[2(2)] ، ^2(22) ، 22 \times 2 ، 22 + 2$$

$$\text{المقدار الثالث : } ^2(22) = 484$$

$$\text{المقدار الرابع : } ^2[2(2)] = 42 = 16$$

$$\text{المقدار الخامس : } ^{22}[2] = 4194304 \text{ وهو أكبرها قاطبة وكذلك في حالة الرقم ٣}$$

فإن أكبر الأرقام الممكن الحصول عليها من ثلاث ثلاثات .

$$\text{هو } 223 \approx 5,06 \times 10^{10}$$



١١ - ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ثلاث أربعات (٤ ، ٤ ، ٤)

◀ الحل :

في حالة الرقم ٤ فإن الإجابة ليست كحالة الرقم ٢ والرقم ٣

$$\text{أى أنها ليست } 444 = 3,09485 \times 10^{26}$$

$$\text{ولكن الإجابة هي } ^4[4(4)] = 206(4)$$

وهو رقم خرافى يصعب تصوره وعلى هذا ففى حالة العددين ٢ ، ٣ فإنه

توجد الطريقة السابق بيانها لاستنتاج أكبر رقم ممكن ، بينما فى حالة العدد ٤

فما فوق فإنه توجد طرق أخرى .

١٢ - ما هو أكبر رقم يمكن تكوينه من ثلاث سبعات (٧ ، ٧ ، ٧) .

◀ الحل :

الإجابات المحتملة هي: $(7 \times 7 \times 7)$ ، $7(7 \times 7)$ ، $7(77)$ ، $77(7)$ ، $7[7(7)]$.

المقدار الثاني : $7(7 \times 7) = 7(49) \approx 6,78 \times 1110$

المقدار الثالث : $7(77) \approx 1,604 \times 1310$

المقدار الرابع : $77(7) \approx 1,181 \times 6010$

المقدار الخامس : $7[7(7)] = [7^{823543}](7) =$ رقم خرافي يصعب حصره وهو عبارة عن ٧ مرفوعة لأس يعادل ما يزيد عن ثمانمائة ألف وذلك لأن $7(7)$ فقط $823543 =$

وعليك أن تتصور رقم ٧ مرفوع لهذا الأس .

أو هو يعادل ٧ مضروبة في نفسها لما يزيد عن ثمانمائة ألف مرة .

وعلى ما تقدم فإن أكبر رقم يمكن تكوينه من ثلاث أعداد متساوية (من واحد وحتى ٩) يكون في الصورة :

$[(\text{العدد})(\text{العدد}) \text{ العدد أي } (س)(س)(س) \text{ فيما عدا حالتى العددين } ٢ ، ٣ \text{ حيث يكون أكبر رقم ممكن تكوينه كما سبق هو } ٢٢(٢) ، ٣٣(٣) .$
أى $[(\text{العدد})(\text{العدد} + \text{العدد} \times ١٠)]$



١٣ - ما هو أكبر الأرقام وكذلك أصغرها التي يمكن تكوينها من ١ ، ٢ ، ٣ .

◀ الحل :

أكبر الأرقام من ١ ، ٢ ، ٣ ، ليس ٣٢١ ولا ٢(٢١) ولا ٢(٣١) ولا

٢(١٢) ولا $٣ \times ٢ \times ١$ ولا ٣١٢

ولكن أكبرها قاطبة هو ٢١٣

وذلك لأن : $21(2) = 2,14748 \times 910$

بينما $21(3) = 10,4603 \times 910$

ويُلاحظ أن $21(3)$ أكبر من $21(2)$ بمقدار $\approx 4,87$ مرة تقريباً

بينما أصغر الأرقام من 1 ، 2 ، 3 ، ليس 123

ولا $\frac{12}{3}$ ولا $\frac{13}{2}$ ولا $\sqrt[3]{21}$

فأصغر الأرقام هو $\sqrt[2]{21} = 21(2) = \frac{1}{21} \approx 1,0226$



١٤ - اكتب أى عدد من خانتين (آحاد وعشرات) واكتب بجانبه على اليمين نفس العدد ، ثم أطرح من الناتج عشرة أضعافه ثم اقسم الناتج على الرقم ٧ ثم اقسم الناتج على الرقم ١٣ ، تحصل بذلك على الرقم الأصلي .
◀ الحل :

نفترض أن العدد هو ٧٣ ، رقم الآحاد = ٣ ، رقم العشرات = ٧ فالعدد ٧٣ يمكن كتابته على الصورة :

(س × ١ + ص × ١٠) حيث س = ٣ ، ص = ١٠ في مثالنا هذا .

فإذا أضفنا نفس العدد على اليمين يصبح العدد هو ٧٣٧٣

أى على الصورة :

س × ١ + ص × ١٠ + س × ١٠٠ + ص × ١٠٠٠

(١) = (١٠١ س + ١٠١٠ ص)

، عشرة أضعاف العدد هي ٧٣٠ أى على الصورة :

(٢) (س × ١٠ + ص × ١٠٠)

وبطرح (٢) من (١) نحصل على :

(٩١ س + ٩١٠ ص) = ٩١ (س + ١٠ ص)

= ٧ × ١٣ (س + ١٠ ص)

تم بالقسمة على كل من ٧ ، ١٣ نحصل على (س + ١٠ . ص) أى
 $(7 \times 10 + 3) = 73$ وهو نفس العدد الأصلي .

$(7 \times 10 + 3) = 73$ وهو نفس العدد الأصلي .



١٥ - اكتب أى عدد من ثلاث خانات (آحاد وعشرات ومئات) ثم اكتب
بجانبه على اليمين نفس العدد ، وبدون طرح أى مقدار ، نقسم الناتج على ٧
ثم على ١١ ثم على ١٣ نحصل على نفس العدد الأصلي .

◀ الحل :

نفرض أن العدد هو ٨٧٦ [الآحاد ٦ ، العشرات ٧ ، المئات ٨] وعلى
هذا يمكن كتابة العدد كالتالى :

[س × ١ + ص × ١٠ + ع × ١٠٠ + ١٠٠٠ × ٨] حيث س = ٦ ، ص = ٧ ،
ع = ٨ وعند إضافة نفس العدد على اليمين إلى العدد الأصلي يصبح العدد
الجديد هو ٨٧٦٨٧٦

ويمكن كتابة هذا العدد الجديد كالتالى :

[س × ١ + ص × ١٠ + ع × ١٠٠ + ١٠٠٠ × س + ص × ١٠٠٠ +
ع × ١٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠٠ × ع]

= [١٠٠١ س + ١٠١٠ ص + ١٠٠١٠٠ ع]

= ١٠٠١ [س + ١٠ ص + ١٠٠ ع] = ١٠٠١ × نفس العدد الأصلي

= ٧ × ١١ × ١٣ × نفس العدد الأصلي = ٨٧٦ × ١٠٠١

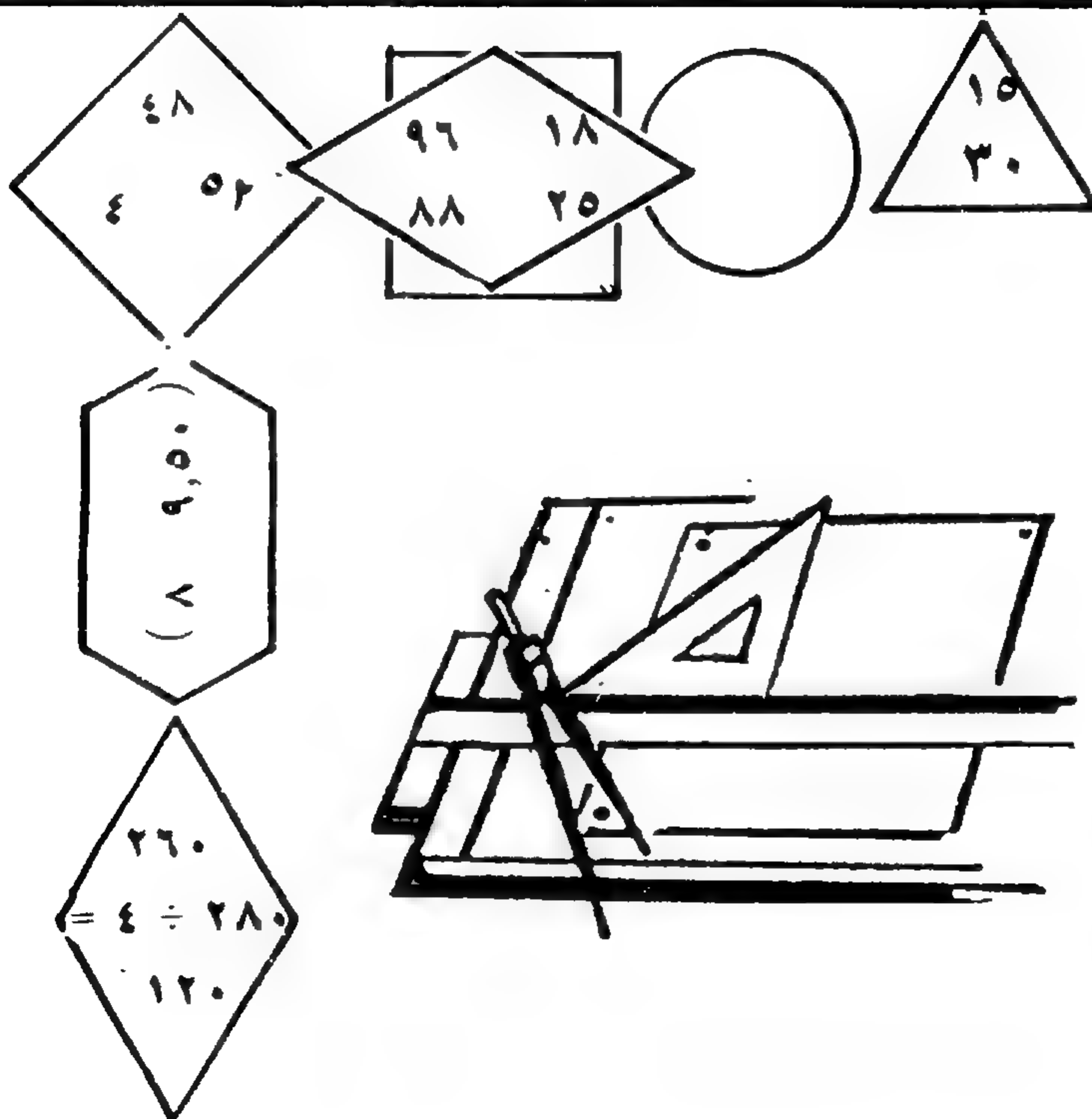
فعند اضافة نفس العدد على يمين العدد الأصلي فالتا نكون كما لو أضفنا ثلاثة
أصفار على يمين العدد ثم جمعنا عليه العدد الأصلي .

وباختصار فكأننا ضربنا فى ١٠٠١ ثم قسمنا على ١٠٠١ مرة ثانية



الباب الثالث

المربعات العجيبة



المربعات العجيبة

فيما يلي بعض المربعات العجيبة وهي مبنية على أساس رياضي بحت وسوف نورد في النهاية القاعدة التي يمكنك بواسطتها عمل عدد لا نهائي من المربعات العجيبة وبمتمى السهولة .

★ مربع 3×3 ،

مجموع المربعات :

$$9 = 3 \times 3 \text{ (عدد فردي)}$$

إن المجموع $= 15$ في جميع الاتجاهات ،
الأرقام من ١ إلى ٩ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار واحد صحيح

٨	٣	٤
١	٥	٩
٦	٧	٢

★ مربع 5×5 ،

مجموع المربعات :

$$25 = 5 \times 5 \text{ (عدد فردي)}$$

إن المجموع $= 65$ في جميع الاتجاهات ،
الأرقام من ١ إلى ٢٥ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار واحد صحيح

٢٣	١٠	١٧	٤	١١
٦	١٨	٥	١٢	٢٤
١٩	١	١٣	٢٥	٧
٢	١٤	٢١	٨	٢٠
١٥	٢٢	٩	١٦	٣

★ مربع 5×5 ،

مجموع المربعات :

$$25 = 5 \times 5 \text{ (عدد فردي)}$$

والأرقام من : ٤ إلى ٢٨ تزايدية
بمقدار واحد صحيح وبدون تكرار
والمجموع ٨٠ في كل الاتجاهات .

٦	١٩	١٢	٢٥	١٨
٢٣	١١	٢٤	١٧	٥
١٠	٢٨	١٦	٤	٢٢
٢٧	١٥	٨	٢١	٩
١٤	٧	٢٠	١٣	٢٦

★ مربع 7×7 ،

مجموع المربعات $7 \times 7 = 49$ (عدد فردى)

٤٦	٢١	٣٨	١٣	٣٠	٥	٢٢
١٥	٣٩	١٤	٣١	٦	٢٣	٤٧
٤٠	٨	٣٢	٧	٢٤	٤٨	١٦
٩	٣٣	١	٢٥	٤٩	١٧	٤١
٣٤	٢	٢٦	٤٣	١٨	٤٢	١٠
٣	٢٧	٤٤	١٩	٣٦	١١	٣٥
٢٨	٤٥	٢٠	٣٧	١٢	٢٩	٤

والمجموع $= 175$ فى جميع الاتجاهات
الأرقام من ١ إلى ٤٩ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار واحد صحيح

★ مربع 3×3 ،

٨٠	٣٠	٤٠
١٠	٥٠	٩٠
٦٠	٧٠	٢٠

والمجموع $= 150$ فى جميع الاتجاهات
الأرقام من ١٠ إلى ٩٠ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار ١٠
(قارن بينه وبين المربع الأول)

★ مربع 3×3 ،

٨٧	٣٧	٤٧
١٧	٥٧	٩٧
٦٧	٧٧	٢٧

والمجموع $= 171$ فى جميع الاتجاهات
الأرقام من ١٧ إلى ٩٧ بدون تكرار .
وتزايدية بمقدار ١٠

٢٣٠	١٠٠	١٧٠	٤٠	١١٠
٦٠	١٨٠	٥٠	١٢٠	٢٤٠
١٩٠	١٠	١٣٠	٢٥٠	٧٠
٢٠	١٤٠	٢١٠	٨٠	٢٠٠
١٥٠	٢٢٠	٩٠	١٦٠	٣٠

★ مربع ٥×٥ ،
المجموع = ٦٥٠ في جميع الاتجاهات
من ١٠ إلى ٢٥٠ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار ١٠
(قارن بينه وبين المربع الثاني)

١٠,٥	٥,٥	٦,٥
٣,٥	٧,٥	١١,٥
٨,٥	٩,٥	٤,٥

★ مربع ٣×٣ ،
المجموع = ٢٢,٥ في جميع الاتجاهات
الأرقام تبدأ من ٣,٥ إلى ١١,٥
وتزايدية بمقدار واحد صحيح ، وبدون
تكرار .

٧٥,٣	٢٥,٣	٣٥,٣
٥,٣	٤٥,٣	٨٥,٣
٥٥,٣	٦٥,٣	١٥,٣

★ مربع ٣×٣ ،
المجموع = ١٣٥,٩ في جميع الاتجاهات
مجموع المربعات = $٣ \times ٣ = ٩$ عدد
فردى
الأرقام تبدأ من ٥,٣ إلى ٨٥,٣ وتزايدية
بمقدار ١٠ وبدون تكرار

١٤,٢	١٣,٢	١٣,٤
١٢,٨	١٣,٦	١٤,٤
١٣,٨	١٤	١٣

مربع ٣×٣ ، المجموع = ٤٠,٨ في
جميع الاتجاهات الأرقام تبدأ من ١٢,٨
إلى ١٤,٤ وتزايدية بمقدار ٠,٢ وبدون
تكرار .

١٢	١	١٨
٩	٦	٤
٢	٣٦	٣

★ مربع ٣×٣ ،
عدد المربعات = ٩ (عدد فردى)
حاصل ضرب الأرقام في جميع
الاتجاهات = ٢١٦

١٠	٢٠٠	٤
٨	٢٠	٥٠
١٠٠	٢	٤٠

★ مربع 3×3 ،
حاصل ضرب الأرقام في جميع
الاتجاهات = ٨٠٠٠

٣٥	٨	٢٧	١
٩	٣	٢٨	١٠
٤	٤٥	٢	٢١
٦	٧	٥	٣٦

★ مربع 4×4 ،
عدد المربعات = ١٦ (عدد زوجي)
حاصل ضرب الأرقام في جميع
الاتجاهات = ٧٥٦٠

٣	٢٥	٤٥
٢٢٥	١٥	١
٥	٩	٧٥

★ مربع 3×3 ،
عدد المربعات = ٩ (عدد فردي)
حاصل ضرب الأرقام في جميع
الاتجاهات = ٣٣٧٥

٣	٠	١	٢	٤	٣
١	٥	١	١	٠	٥
٠	٠	٣	٣	٦	١
٤	١	٤	٢	٢	٠
٣	١	٢	٣	٠	٤
٢	٦	٢	٢	١	٠

★ مربع سحري من ١٨ قطعة دومينو
ومجموع النقط في كل صف وعمود
وقطر = ١٣

٦	٣	١	٥	٠	٣
٣	١	٦	٢	٢	٤
٣	٣	٤	٣	٥	٠
١	٤	١	٢	٦	٤
٠	٤	٦	٦	٠	٢
٥	٣	٠	٠	٥	٥

★ مربع سحري من ١٨ قطعة دومينو
ومجموع النقط في كل صف وعمود
وقطر = ١٨

٤	٤	٢
٣	٠	٤
٣	٣	٤

★ مربع سحري من ٤ قطع دومينو
ومجموع النقط في كل ضلع من
أضلاعه = ١٠

٢	٦	٤
٥	٠	٦
٥	٥	٢

★ مربع سحري من ٤ قطع دومينو
ومجموع النقط في كل ضلع من
أضلاعه = ١٢

٦	٦	٤
٥	٠	٦
٥	٥	٦

★ مربع سحري من ٤ قطع دومينو
ومجموع النقط في كل ضلع من
أضلاعه = ١٦

★ مربع 9×9

مجموع المربعات $= 9 \times 9 = 81$ (عدد فردى)

٧٧	٣٦	٦٧	٢٦	٥٧	١٦	٤٧	٦	٣٧
٢٨	٦٨	٢٧	٥٨	١٧	٤٨	٧	٣٨	٧٨
٦٩	١٩	٥٩	١٨	٤٩	٨	٣٩	٧٩	٢٩
٢٠	٦٠	١٠	٥٠	٩	٤٠	٨٠	٣٠	٧٠
٦١	١١	٥١	١	٤١	٨١	٣١	٧١	٢١
١٢	٥٢	٢	٤٢	٧٣	٣٢	٧٢	٢٢	٦٢
٥٣	٣	٤٣	٧٤	٣٣	٦٤	٢٣	٦٣	١٣
٤	٤٤	٧٥	٣٤	٦٥	٢٤	٥٥	١٤	٥٤
٤٥	٧٦	٣٥	٦٦	٢٥	٥٦	١٥	٤٦	٥

والمجموع $= 369$ فى جميع الاتجاهات

الأرقام من ١ إلى ٨١ بدون تكرار
وتزايدية بمقدار واحد صحيح

★ مربع ۱۱ × ۱۱

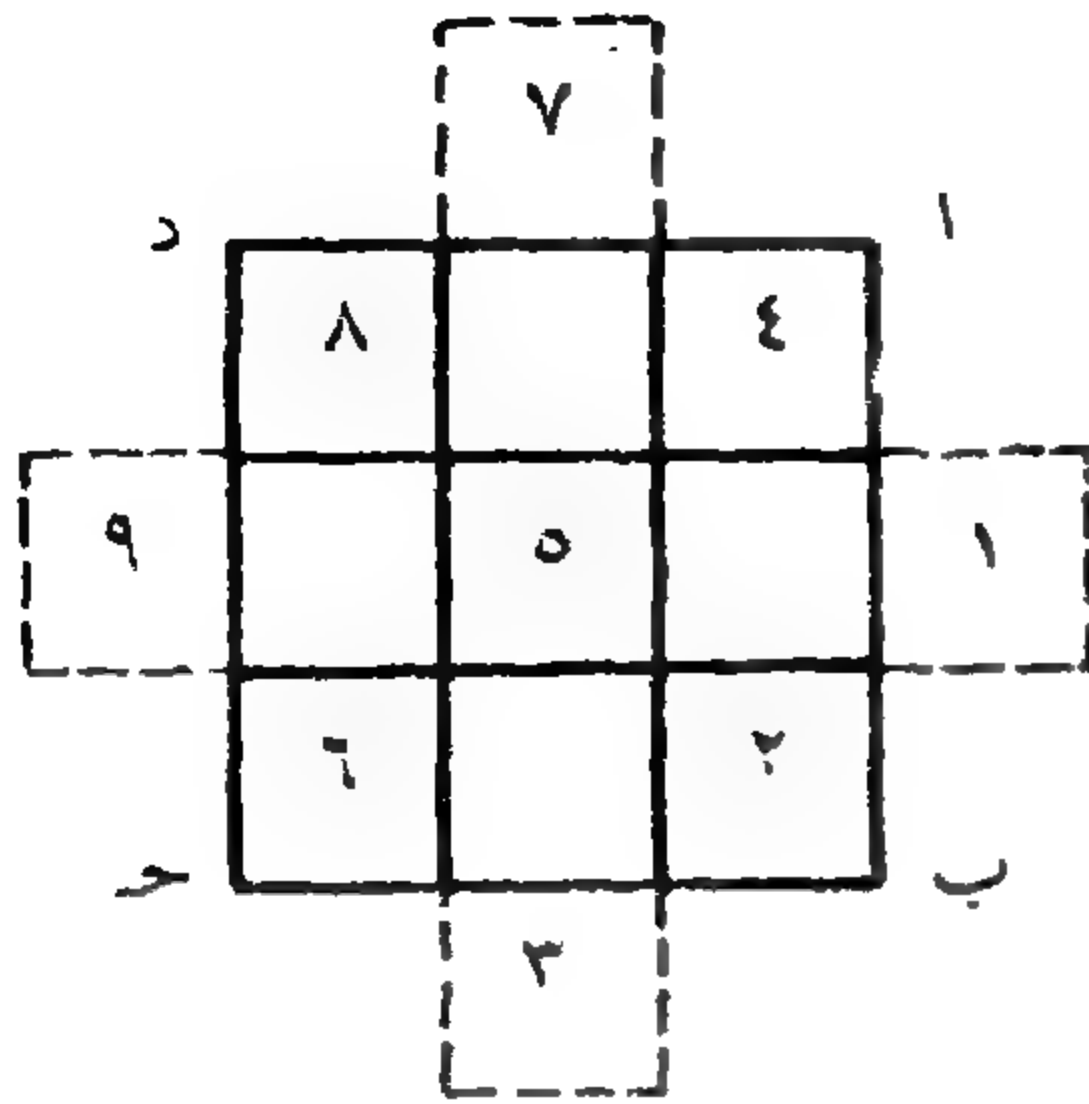
مجموع المربعات = ۱۱ × ۱۱ = ۱۲۱ (عدد فردی)

۱۱۶	۵۵	۱۰۴	۴۳	۹۲	۶۱	۸۰	۱۹	۶۸	۷	۵۶
۴۵	۱۰۵	۴۴	۹۳	۳۲	۸۱	۲۰	۶۹	۸	۵۷	۱۱۷
۱۰۶	۳۴	۹۴	۳۳	۸۲	۲۱	۷۰	۹	۵۸	۱۱۸	۴۶
۳۵	۹۵	۲۳	۸۳	۲۲	۷۱	۱۰	۵۹	۱۱۹	۴۷	۱۰۷
۹۶	۲۴	۸۴	۱۲	۷۲	۱۱	۶۰	۱۲۰	۴۸	۱۰۸	۳۶
۲۵	۸۵	۱۳	۷۳	۱	۶۱	۱۲۱	۴۹	۱۰۹	۳۷	۹۷
۸۶	۱۴	۷۴	۲	۶۲	۱۱۱	۵۰	۱۱۰	۳۸	۹۸	۲۶
۱۵	۷۵	۳	۶۳	۱۱۲	۵۱	۱۰۰	۳۹	۹۹	۲۷	۸۷
۷۶	۴	۶۴	۱۱۳	۵۲	۱۰۱	۴۰	۸۹	۲۸	۸۸	۱۶
۵	۶۵	۱۱۴	۵۳	۱۰۲	۴۱	۹۰	۲۹	۷۸	۱۷	۷۷
۶۶	۱۱۵	۵۴	۱۰۳	۴۲	۹۱	۳۰	۷۹	۱۸	۶۷	۶

والمجموع = ۶۷۱ فی جميع الاتجاهات

الأرقام من ۱ إلى ۱۲۱ بدون تكرار
وتزايدية بتقدير واحد صحيح

◀ شرح طريقة عمل مربع عجيب نظام 3×3 :



١ - يُرسم المربع كالمعتاد 3×3

(الخطوط المتصلة)

٢ - يتم عمل مربعات إضافية بارزة

كالمبينة بالشكل (الخطوط المتقطعة) .

٣ - أصبح عدد المربعات الآن

١٣ مربعاً (٩ + ٤) ، ويتم استعمال :

الأربعة الزائدين لكتابة الأرقام بهم

ويُستغنى عن أربعة مربعات في المقابل من داخل المربع الكبير الأصلي .

ولا يأتي هذا إلا بكتابة الأرقام في اتجاه مائل (قطري) كالمبين بالشكل

وبتسلسل الأرقام (من ١ إلى ٩) الطبيعي أي [١ ثم ٢ ثم ٣ ثم ٤ ، ... ثم

٥] .

٤ - يتم إدخال الأرقام المكتوبة بالمربعات الزائدة إلى داخل المربع الكبير

الأصلي (أ ب ج د) ، حيث ينقل الرقم إلى أحد مربعات صفه (أو عموده) .

ويكون هذا المربع المنقول له الرقم آخر (أبعد) مربع عن الرقم في المربع

الزائد .

وفي مثالنا هذا : بنقل رقم ١ إلى المربع الصغير الموجه د فيما بين مربعي ٥ ،

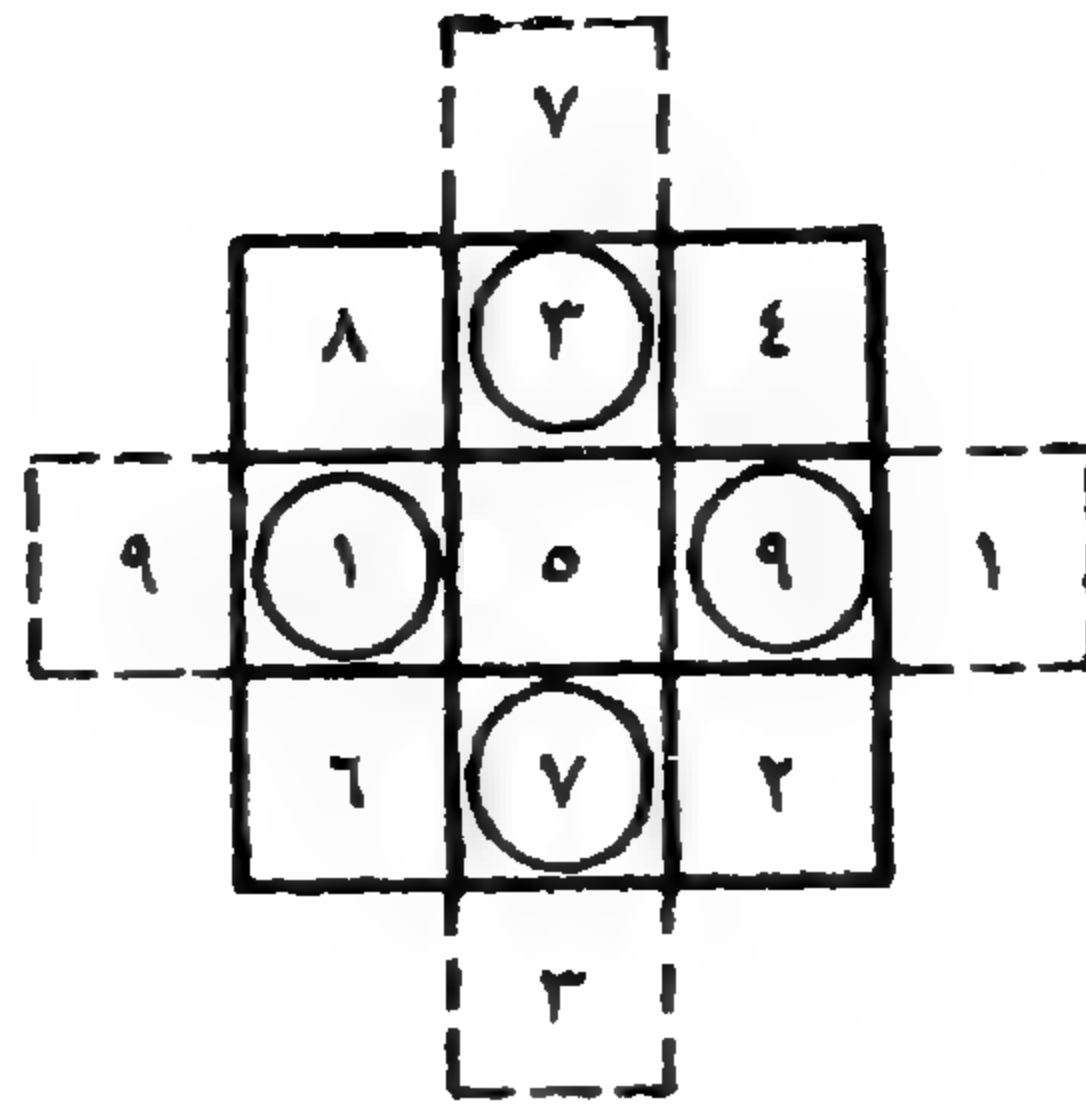
٩ ، بينما ينقل رقم ٩ إلى المربع الصغير المحصور فيما بين مربعي ١ ، ٥ .

وكذلك ينقل رقم ٧ إلى المربع الصغير (على نفس العمود) الموجود فيما بين

مربعي ٣ ، ٥ ، بينما ينقل رقم ٣ إلى المربع الصغير الموجود (على نفس العمود)

فيما بين مربعي ٥ ، ٧ .

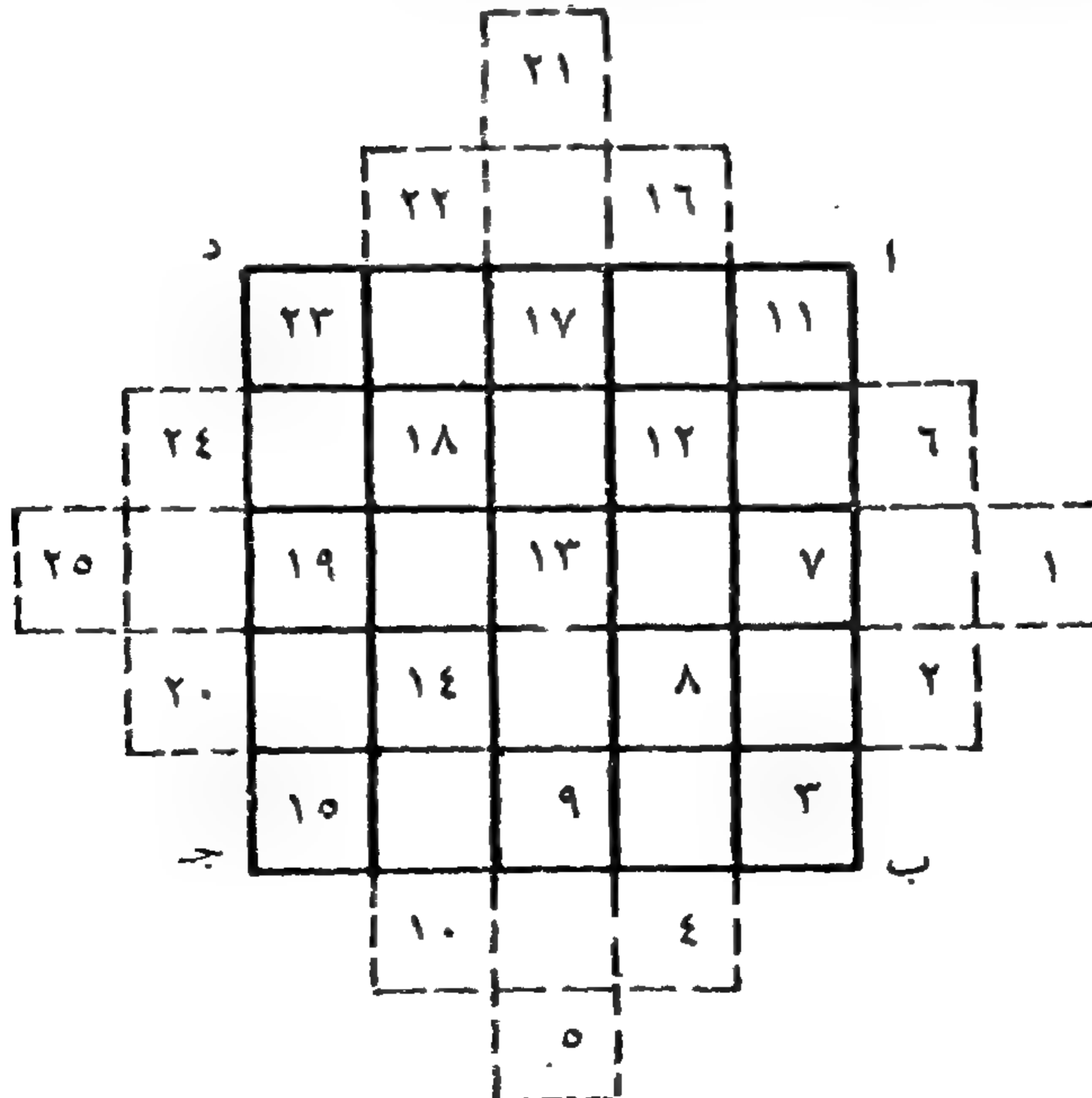
٥ - يصبح الشكل النهائي كالآتي :



٦ - بعد هذا تُلغى المربعات الزائدة وتصبح الأرقام التي بداخل المربع الكبير ا ب ج د بحيث تحقق :
مجموع الأرقام في أى صف أو عمود أو قطر = ١٥

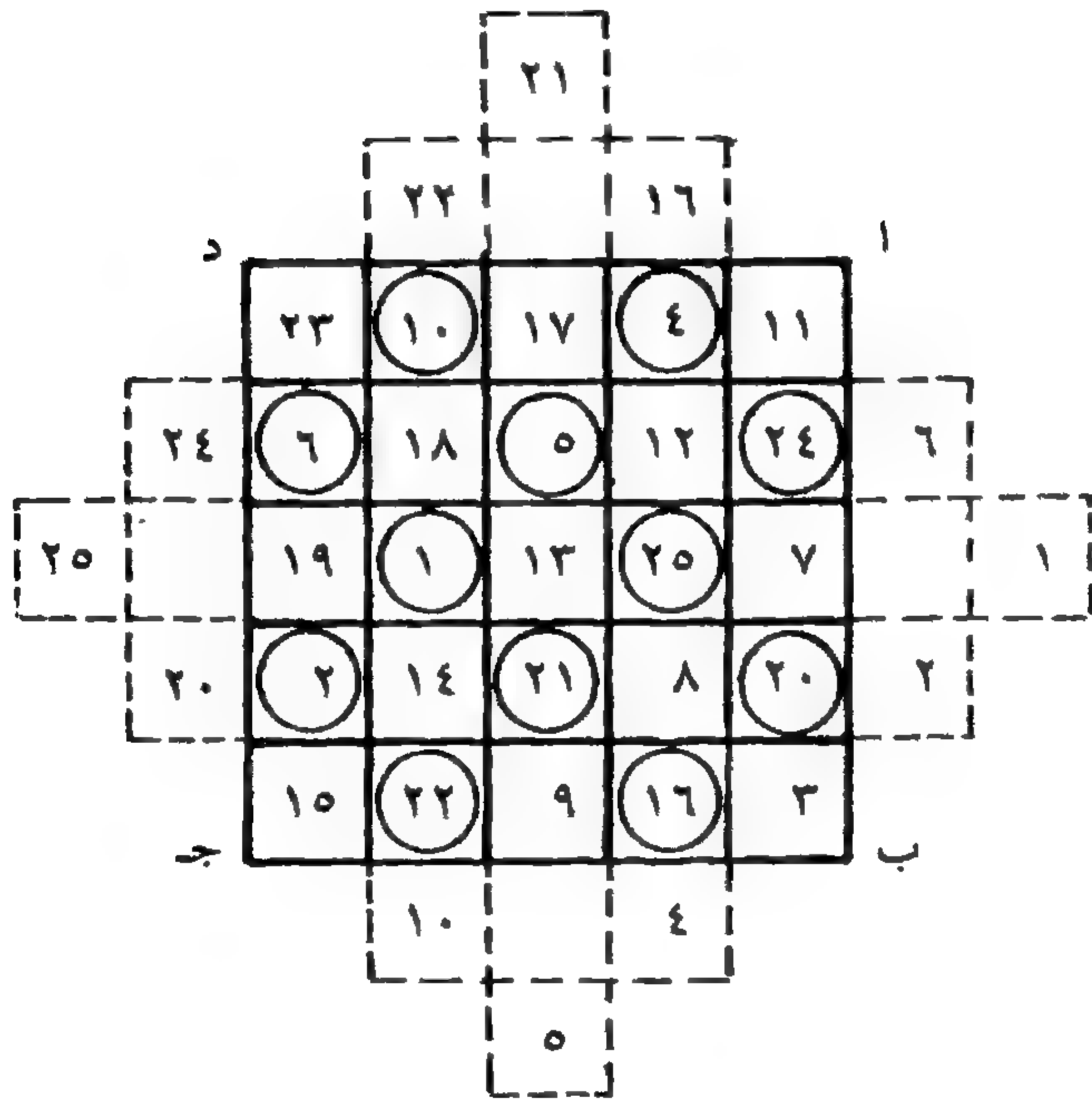


◀ شرح طريقة عمل مربع عجيب نظام ٥ × ٥



١ - يُرسم المربع كالمعتاد ٥ × ٥ (الخطوط المتصلة) ا ب ج د

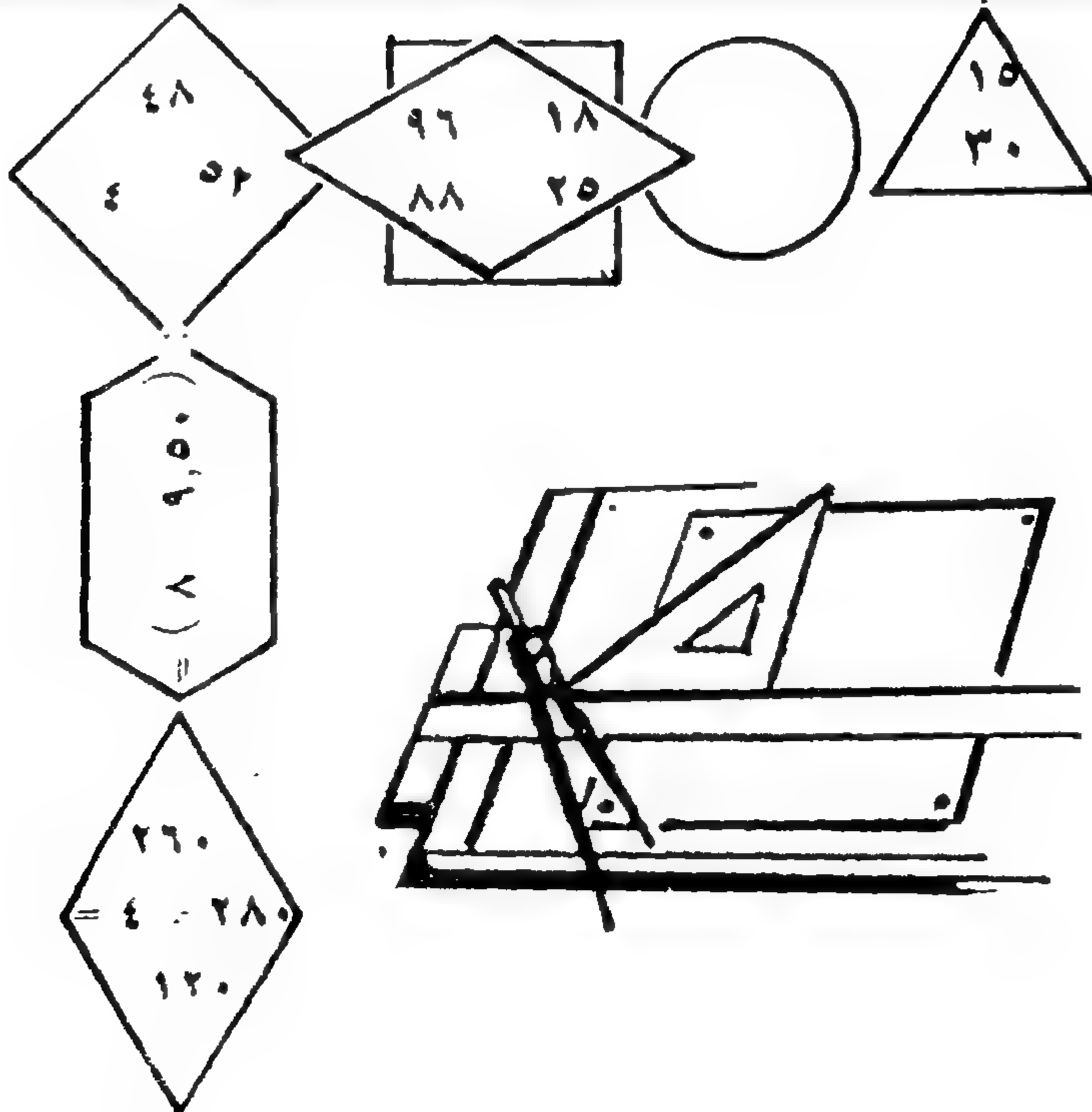
- ٢ - يتم إضافة مربعات إضافية بارزة كالهيئة بالشكل (الخطوط المتقطعة) .
- ٣ - أصبح عدد المربعات في الوضع الجديد = ٤١ مربعاً (٢٥ + ١٦)
- ٤ - يتم كتابة الأرقام من ١ إلى ٢٥ كالمعتاد ويتسلسل طبيعي وبدون تفكير وفي اتجاه قطري كاليمين بالشكل .
- ٥ - يتم إدخال الأرقام التي كتبت في المربعات الزائدة إلى داخل المربع الأصلي ا ب ج د بنفس الطريقة السابقة (٣ × ٣) كما هو مبين بالشكل التالي :



- ٦ - بعد عملية إدخال الأرقام يصبح المربع ا ب ج د هو المربع العجيب ومجموع الأرقام أفقياً أو رأسياً أو قطرياً = ٦٥
- وبنفس الطريقة يمكن عمل أى عدد من المربعات (فردية فقط) .

الباب الرابع

مسائل رياضية متنوعة



١ - اشترى رجل بنطلون وقميص وربطة عنق بمبلغ إجمالي = ٦٠ جنيهاً ، فإذا كان ثمن البنطلون أغلى من ثمن القميص بعشرة جنيهات ومجموع ثمن البنطلون والقميص معاً يزيد عن ثمن ربطة العنق بأربعين جنيهاً فكم يبلغ سعر كل منهم . المطلوب هو حل المسألة شفيهاً بدون أية معادلات

◀ الحل :

لما كان سعر البنطلون والقميص يزيد ٤٠ جنيهاً عن ثمن ربطة العنق وسعرهم جميعاً يساوي ٦٠ جنيهاً معنى هذا أن زوج من ربطات العنق سعرها هو الفرق بين ٦٠ ، ٤٠ أى ٢٠ جنيهاً .

وعلى هذا فسعر ربطة العنق الواحدة = $\frac{٢٠}{٢} = ١٠$ جنيهات

وعليه يصبح ثمن البنطلون والقميص = $٦٠ - ١٠ = ٥٠$ جنيهاً ، وحيث أن سعر البنطلون أزيد من سعر القميص بعشرة جنيهات وسعرهما سوياً هو ٥٠ جنيهاً .

$$\therefore \text{ثمن القميص الواحد} = \frac{٤٠}{٢} = ٢٠ \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \text{ثمن البطلون} = ٦٠ - (١٠ + ٢٠) = ٣٠ \text{ جنيهاً}$$

∴ الأسعار كالتالى : ٣٠ للبنطلون ، ٢٠ للقميص ، ١٠ لربطة العنق

◀ برهان جبرى :

نفترض أن سعر البنطلون = س ، سعر القميص = ص ، سعر ربطة العنق = ع

$$(١) \quad \therefore (س + ص) + ع = ٦٠$$

$$(٢) \quad ، (س + ص) - ع = ٤٠$$

وبطرح (٢) من (١) :

$$\therefore ٢٠ = ع \quad \therefore ١٠ = ع \text{ جنيهات .}$$

$$(٣) \quad \therefore ٥٠ = ١٠ - ٦٠ = ص + س$$

(٤)

س - ص = ١٠

وبطرح (٤) من (٣) :

∴ ٢ ص = ٤٠ ، ∴ ص = ٢٠ جنيهاً .

∴ س = ٦٠ - ٢٠ - ١٠ = ٣٠ جنيهاً .



٢ - يعمل بورش السيارات بإحدى الشركات عاملان ميكانيكيان ، أحدهما أكثر مهارة من الآخر ، حيث يستطيع الميكانيكى الماهر عمل (عمرة) محرك سيارة ما فى يومى عمل كاملين [يوم العمل الكامل = ٨ ساعات عمل] بينما يقوم بنفس العمل بنفس الدقة العامل الآخر ولكن فى ثلاثة أيام فهل يمكنك معرفة فى أى زمن بالضبط يمكنهما سوياً عمل العمرة على أن يُقسم العمل بينهما بغرض تنفيذه فى أقل وقت ممكن .

ملحوظة : يجب الانتهاء من العمل سوياً فى نفس الوقت لكل منهما .

◀ الحل :

من الواضح أن سرعة أداء الميكانيكى الماهر تزيد عن الميكانيكى الأقل مهارة بنسبة = $\frac{3}{2}$ أى مرة ونصف المرة .

وعلى هذا فيجب أن يُسند للميكانيكى الماهر قدراً من العمل يزيد بمرة ونصف المرة عن حجم العمل الذى يُسند إلى الميكانيكى الأقل مهارة وعلى هذا الأساس فقط يمكن لهما أن ينهيا عملهما فى نفس الوقت وعلى هذا يلزم تقسيم العمل لإنهاء (عمرة) محرك واحد بينهما حيث يأخذ الميكانيكى الماهر $\frac{3}{5}$ من حجم العمل ، بينما يُسند للآخر $\frac{2}{5}$ من حجم العمل فى (العمرة) .

والآن ، علينا أن نحسب الوقت اللازم لإنجاز $\frac{3}{5}$ (٠,٦) من حجم

العمل بواسطة العامل الماهر وحيث أنه ينجز العمل كله لو كان بمفرده فى يومين

كاملين أى فى ١٦ ساعة ، ففى خلال $١٦ \times ٠,٦ = ٩,٦$ ساعة يمكنه أن ينجز ٠,٦ من حجم العمل .

وفى هذه الأثناء يكون العامل الآخر قد قام بإنجاز ٠,٤ من حجم العمل أيضاً فى ٩,٦ ساعة ، أى فى نفس المدة $[٨ \times ٣ \times ٠,٤]$ وعليه فانهما يستطيعا إنجاز (عمرة) المحرك سوياً فى خلال ٩,٦ ساعة فقط $[٣٦ \text{ } ^\text{ق} \text{ } ٩ \text{ } ^\text{س}]$ ولكن بمعدلات أداء مختلفة .

◀ حل ثان :

فى خلال ستة أيام عمل يستطيع العامل الماهر عمل ثلاث (عمرات) لنفس النوع من المحركات ، وفى خلال ستة أيام يقوم العامل لأقل مهارة بعمل (عمرتين) فقط لهذا النوع من المحركات . وعلى ما تقدم فانه فى خلال ستة أيام يستطيع العاملان عمل خمسة (عمرات) لهذا النوع من المحركات . وهذا يعنى أنه يلزم $\frac{1}{6}$ الوقت (ستة أيام) لعمل (عمرة) محرك واحد

$$\text{أى } \frac{1}{6} \times ٦ = ١,٢ \text{ يوم عمل كامل}$$

$$\text{أى } ١,٢ \times ٨ = ٩,٦ \text{ ساعة .}$$



٣ - سئل رجل عن عمره فأجاب بضرورة مطلوب حلها وهى كالآتى : خذ خمسة أضعاف عمرى بعد خمس سنوات واطرح منها خمسة أضعاف عمرى منذ خمس سنوات فيتبقى لك عدد سنوات عمرى بالضبط فكم عمر الرجل .

◀ الحل :

نفرض أن عمر الرجل الآن = س

∴ عمره بعد خمس سنوات = س + ٥

∴ عمره قبل خمس سنوات = س - ٥

ومن ثم يمكننا عمل المعادلة الجبرية الآتية وهى من الدرجة الأولى فى س :

$$5(س + 5) - (س - 5) = س$$

$$\therefore 5س + 25 - 25 + س = س$$

ومنها $س = 50$ سنة . وهو عمر الرجل .

فعمر الرجل بعد خمس سنوات = 55 سنة

عمر الرجل منذ خمس سنوات = 45 سنة

$$50 \times 5 - 55 \times 5 = 45 \times 5$$



٤ - سئل شاب عن عمره فأجاب بأن ضعف عمره بعد عشر سنين يساوى ٣ أضعاف عمره الآن ، فكم عمره الآن .

◀ الحل :

لو فرضنا أن عمره الآن = س

يكون عمره بعد عشر سنين = س + 10

ويكون ٣ أضعاف عمره الآن = ٣ س

وضعف عمره بعد عشر سنوات = ٢(س + 10)

ويمكن تكوين المعادلة البسيطة الآتية :

$$2(س + 10) = 3س$$

$\therefore س = 20$ عام وهو عمر الشاب الآن .



٥ - رجل وزنه ٧٠ كجم يقود دراجته وعليها حمل يعادل ٣٠ كجم فيسير

بسرعة تعادل ١٠ كم / ساعة ، فكم تبلغ سرعته عندما يحمل وزنا قدره ١٠

كجم وبأى سرعة يقود دراجته بدون أحمال باعتباره يبدل نفس الشغل

لقيادة دراجته فى جميع الحالات .

◀ الحل :

من المنطقي أن سرعة الدراجة تتناسب مع الحمل الكلى أى وزن الرجل والحمولة معا وذلك بفرض أنه يبذل نفس الشغل لنفس المسافة وطبيعى أن التناسب هنا عكسى ، بمعنى أن السرعة تقل مع زيادة الوزن ، وواضح أن الرجل يمكنه أن يسير بحمل كبير بسرعة أكبر عما لو كان بحمل صغير إذا كان سيبدل شغلا أكبر إلا أننا سنعتبر أنه يبذل نفس الشغل (المجهود) نظريا لنفس المسافة .

$$\begin{aligned} \therefore (70 + 30) \text{ تتناسب عكسيا مع السرعة } (10 \text{ كم / ساعة}) \\ \therefore 100 \propto \frac{1}{ع} \quad \therefore 100 = \frac{ك}{ع} \text{ حيث ك ثابت التناسب} \\ \therefore \frac{ك}{10} = 100 \text{ ومنها ك} = 1000 \\ \text{وعليه ففى الحالة الثانية .} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (70 + 10) = \frac{1000}{ع} \text{ [حيث ع = سرعته بحمولة 10 كجم]} \\ \text{ومنها ع} = \frac{1000}{80} = 12,5 \text{ كم / ساعة} \\ \text{وكذلك فى حالة قيادته دراجته بدون حمل :} \\ 70 = \frac{1000}{24} \therefore \frac{1000}{70} = 24 \approx 14,29 \text{ كم/ساعة} \end{aligned}$$



٦ - يقود محمد دراجته بحيث (يبدل) بمعدل ٧٠ دورة/ق ، فإذا كان قطر عجلته خلفية = ٥٠ سم وقطر الترس على العجلة الخلفية = نصف قطر الترس الكبير ، فكم تبلغ المسافة التى يسيرها محمد فى الساعة .

◀ الحل :

فى الدراجة يكون (البدال) مركبا على الترس الكبير بالأمام ، ولما كان الترس الصغير مركبا على العجلة الخلفية القائدة أى التى تسبب سير الدراجة فإنه لكل لفة من لفات الترس الكبير فإن الترس الصغير يدور لفتين [نسبة

التروس ١:٢] ، وبالتالي تدور العجلة الخلفية دورتين لكل لفة (تبديلة)
للتروس الأمامي .

وفي كل لفة للعجلة الخلفية فان الدراجة تسير مسافة تعادل محيط العجلة

$$(\text{الخلفية}) \text{ أى } ٢ \times \pi \times \text{نق} = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢٥ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{فالدراجة تقطع كل دقيقة مسافة} = ١٤٠ \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢٥ \text{ سم}$$

$$\approx ٢٢٠,٠٠ \text{ متراً}$$

$$\therefore \text{المسافة التى يقطعها فى الساعة} = ٢٢٠ \times ٦٠ = ١٣٢٠٠ \text{ متر}$$

$$\text{أى} = ١٣.٢ \text{ كم} . ١٠ \%$$



٧ - إشتريت فتاة ، فستاناً وشنطة يد وحذاء وجورباً ، ودفعت فيهم
كلهم مبلغ ١٥٠ جنيهاً ، فإذا كان ثمن الفستان يزيد عن ثمن شنطة اليد
بعشرة جنيهات ومجموع ثمنى الفستان وشنطة اليد يزيد عن ثمن الحذاء بمبلغ
٨٠ جنيهاً ، ومجموع أثمان الفستان وشنطة اليد والحذاء يزيد عن ثمن
الجورب بمبلغ ١٣٠ جنيهاً .

فهل يمكنك معرفة سعر كل نوع على أن يكون ذلك شفهياً وبدون
استخدام أى معادلات .

◀ الحل :

$$\therefore \text{سعر المشتريات كلها} = ١٥٠ \text{ جنيهاً} .$$

$$\text{، فرق سعر الثلاث الأول عن الرابع} = ١٣٠ .$$

$$\therefore \text{فمن الواضح أن الفرق} ١٥٠ - ١٣٠ = ٢٠ \text{ جنيهاً يناظر سعر}$$

جوربين (زوجين) .

$$\therefore \text{سعر الجورب الواحد} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠ \text{ جنيهات} .$$

$$\text{و} \therefore \text{السعر الإجمالى} = ١٥٠ .$$

$$\therefore \text{سعر} \leftarrow \text{الثلاثة لأول} = ١٥٠ - ١٠ = ١٤٠ \text{ جنيهاً} .$$

وبنفس طريقة الحل المنطقية هذه :

∴ سعر ← الثلاثة الأول = ١٤٠ جنيهاً .

وفرق سعر الفستان والشنطة من الحذاء = ٨٠ جنيهاً .

∴ سعر الحذاء = $\frac{١٤٠ - ٨٠}{٢} = ٣٠$ جنيهاً .

وعليه يصبح سعر الفستان والشنطة = $١٤٠ - ٣٠ = ١١٠$ جنيهاً .

بما أن فرق سعر الفستان عن شنطة اليد = ١٠ جنيهات .

∴ سعر شنطة اليد = $\frac{١١٠ - ١٠}{٢} = ٥٠$ جنيهاً .

وعلى هذا يكون سعر الفستان مساوياً : $١١٠ - ٥٠ = ٦٠$ جنيهاً .

أو = $١٥٠ - (١٠ + ٣٠ + ٥٠) = ٩٠ - ٦٠ = ٦٠$ جنيهاً .

∴ الأسعار كالتالى :

٦٠ جنيه للثوب ، ٥٠ جنيه للشنطة ، ٣٠ جنيه للحذاء ، ١٠ جنيهات

للعجورب ومجموعهم = ١٥٠ جنيهاً .



٨ - ثلاثة أشخاص مجموع أعمارهم = ٩٠ عاماً .

فإذا كان عمر الأول يزيد عن عمر الثانى بعشر سنوات ، مجموع عمرى

الأول والثانى معا يزيد عن عمر الثالث بخمسين عاماً فكم يبلغ عمر كل

منهم ، شفها وبدون معادلات .

◀ الحل :

∴ مجموع أعمار الثلاثة = ٩٠ عاماً .

وفرق عمرى الأول والثانى عن الثالث = ٥٠ عاماً .

وعليه فإن ضعف عمر الثالث = $٩٠ - ٥٠ = ٤٠$ عاماً .

∴ عمر الثالث = $\frac{٤٠}{٢} = ٢٠$ عاماً .

∴ عمرى الأول والثانى = $٩٠ - ٢٠ = ٧٠$ عاماً .

وفرق عمر الأول عن الثانى = ١٠ سنوات .

∴ ضعف عمر الثانى = $٧٠ - ١٠ = ٦٠$ عاماً .

∴ عمر الثاني = $\frac{70}{2} = 35$ عاماً .
 ∴ عمر الأول = $70 - 35 = 35$ عاماً .
 أما عمر الأول = $90 - (20 + 35) = 35$ عاماً (كذلك)
 ∴ أعمارهم هي 20 ، 35 ، 40 عاماً على الترتيب .



٩ - ثلاثة رجال مجموع أعمارهم = 140 عاماً ، فإذا كان عمر الأول يزيد عن الثالث ب : 25 عاماً ، وعمر الأول والثالث يزيد عن عمر الثاني ب : 50 عاماً . فكم عمر كل منهم (شفهياً) .

◀ الحل :

واضح أن ضعف عمر الثاني لا بد وأن يساوى أقل من 140 بمقدار ما أى يساوى : $140 - 50 = 90$ عاماً .
 ∴ عمر الثاني = $\frac{90}{2} = 45$ عاماً .
 وعليه فإن عمر الأول والثالث = $140 - 45 = 95$ عاماً .
 والفرق بين عمر الأول والثالث = 25 عاماً .
 ∴ ضعف عمر الثالث = $95 - 25 = 70$ عاماً .
 ∴ عمر الثالث = $\frac{70}{2} = 35$ عاماً .
 ∴ عمر الأول = $(35 - 95) = 60$ عاماً .
 أما عمر الأول = $140 - (35 + 45) = 60$ عاماً .
 ∴ أعمارهم هي 35 ، 45 ، 60 عاماً على الترتيب .



١٠ - إذا وضعنا ثلاث قطع شطرنج على لوحة الشطرنج ، فهل يمكنك حساب عدد الأوضاع المختلفة للقطع الثلاث على الرقعة .

◀ الحل :

إذا بدءنا بالقطعة الأولى نجد أنه يمكن وضعها في أى خانة من الأربعة

وستون وهى عدد خانات رقعة الشطرنج ولكل وضع منها يتبقى ٦٣ مربعاً يمكن أن يوضع بأى مربع منها القطعة الثانية أى أنه لكل وضع من الأربعة وستون وضعاً التى تأخذها القطعة الأولى ، يكون هناك ٦٣ وضعاً للقطعة الثانية فيصبح عدد الأوضاع الممكنة لقطعتين $= 64 \times 63 = 4032$ وضعاً

ثم أنه لكل وضع من الثلاث وستون وضعاً للقطعة الثانية يوجد ٦٢ وضعاً للقطعة الثالثة ، أو بطريقة أخرى :

لكل وضع من الأوضاع البالغ عددها ٤٠٣٢ وضعاً للأولى والثانية يتبقى ٦٢ مربعاً فارغاً للقطعة الثالثة .

وبذلك فإن مجموع الأوضاع الممكنة لثلاث قطع شطرنج على الرقعة :
يساوى $64 \times 63 \times 62 = 249984$

وكما ترى فهو رقم يساوى تقريباً ربع مليون وضع والآن وبنفس الطريقة ، لنرى كم يكون عدد الأوضاع فى حالة وجود ٥ قطع شطرنج
العدد $= 64 \times 63 \times 62 \times 61 \times 60 = 914941440$
وهو رقم يكاد يقترب من مليار وضعاً مختلفاً .



١١ - بائعتا بيض توجها لبيع ما معهما من بيض بسوق القرية ، وكانت الأولى معها ٤٢٠ بيضة وتبيع الـ ٤ بيضات بسعر ٣٠ قرشاً والأخرى معها ٤٢٠ بيضة وتبيع الثلاث بيضات بسعر ٣٠ قرشاً فاتفقنا على أن يجمعا البيض كله (٨٤٠) فى سلة واحدة ويبيعا البيض بسعر ٦٠ قرشاً لكل ٧ بيضيات $[7 = 3 + 4 , 60 = 30 + 30]$ والمطلوب حساب نصيب كل منهما فى هذه الحالة ، وهل هناك مكسب أم خسارة (لهما سوياً) .

◀ الحل :

قد يتصور البعض أنه لا يوجد مكسب أو خسارة طبقاً لسياق المسألة إلا أن واقع الأمر يختلف كثيراً كما يتضح من الآتى :

ففى حالة أن كلاً منهن ستبيع بمفردها :

$$\therefore \text{ستحصل الأولى على مبلغ} = \frac{30}{4} \times 420 = 3150 \text{ قرشاً}$$

$$\text{بينما ستحصل الثانية على مبلغ} = \frac{30}{3} \times 420 = 4200 \text{ قرشاً}$$

$$\text{ومجموع ما يحصل عليه سوياً فى هذه الحالة} = 4200 + 3150$$

$$= 7350 \text{ قرشاً .. ①}$$

وفى حالة البيع الجماعى (سوياً) :

$$\text{فإن كمية البيض كلها} = 420 + 420 = 840 \text{ بيضة}$$

$$\text{ثمن البيع للبيض كله} = \frac{60}{7} \times 840 = 7200 \text{ قرشاً .. ②}$$

فإذا قارنا ① ، ② نجد أنهما عندما تبيعان سوياً فسوف تخسران مامقداره : $7350 - 7200 = 150$ قرشاً ولكن كيف نفسر هذه الخسارة

ومن يتحملها من البائعتين وكيفية توزيع المبالغ حيثئذ .

فى البداية كان سعر بيع البائعة الأولى $= \frac{30}{4} = 7,5$ قرش كل بيضة

وكان سعر بيع البائعة الثانية $= \frac{30}{3} = 10$ قروش لكل بيضة

وفى حالة البيع الجماعى فان سعر البيع $= \frac{60}{7} = 8 \frac{4}{7}$ قرش لكل بيضة

\therefore فمن الواضح أن البائعة الأولى تأخذ أكثر فى حالة البيع الجماعى

$$\text{فهى سوف تحصل على} 420 \times \frac{60}{7} = 3600 \text{ قرشاً}$$

وسوف تكون الزيادة بالنسبة لها $= 3600 - 3150 = 450$ قرشاً .

بينما البائعة الثانية فسوف تحصل على : $420 \times \frac{60}{7} = 3600$ قرشاً

وبذلك فهى سوف تخسر : $4200 - 3600 = 600$ قرشاً .

ومبلغ الـ 600 قرشاً التى خسرتها البائعة الثانية عبارة عن : 450 قرشاً أخذتها

الأولى كمكسب زائد ، بالإضافة إلى 150 قرشاً (الخسارة الكلية) وسنجد

أن متوسط سعر البيضة فى الحالة الأولى (البيع منفرداً)

$$= \frac{\frac{30}{3} + \frac{30}{4}}{2} = \frac{3}{4} \times 8 \text{ قرش / للبيضة .}$$

وفى حالة البيع الجماعى فإن سعر البيضة فى المتوسط =

$$\frac{60}{7} = 8 \frac{4}{7} \text{ قرش / للبيضة}$$

وعليه فإن سعر البيع فى حالة البيع الجماعى يقل بمقدار :

$$\left(٨ \frac{٤}{٧} - ٨ \frac{٣}{٤} \right) \text{ قرش / للبيضة } = \frac{٥}{٢٨} \text{ قرشاً للبيضة}$$

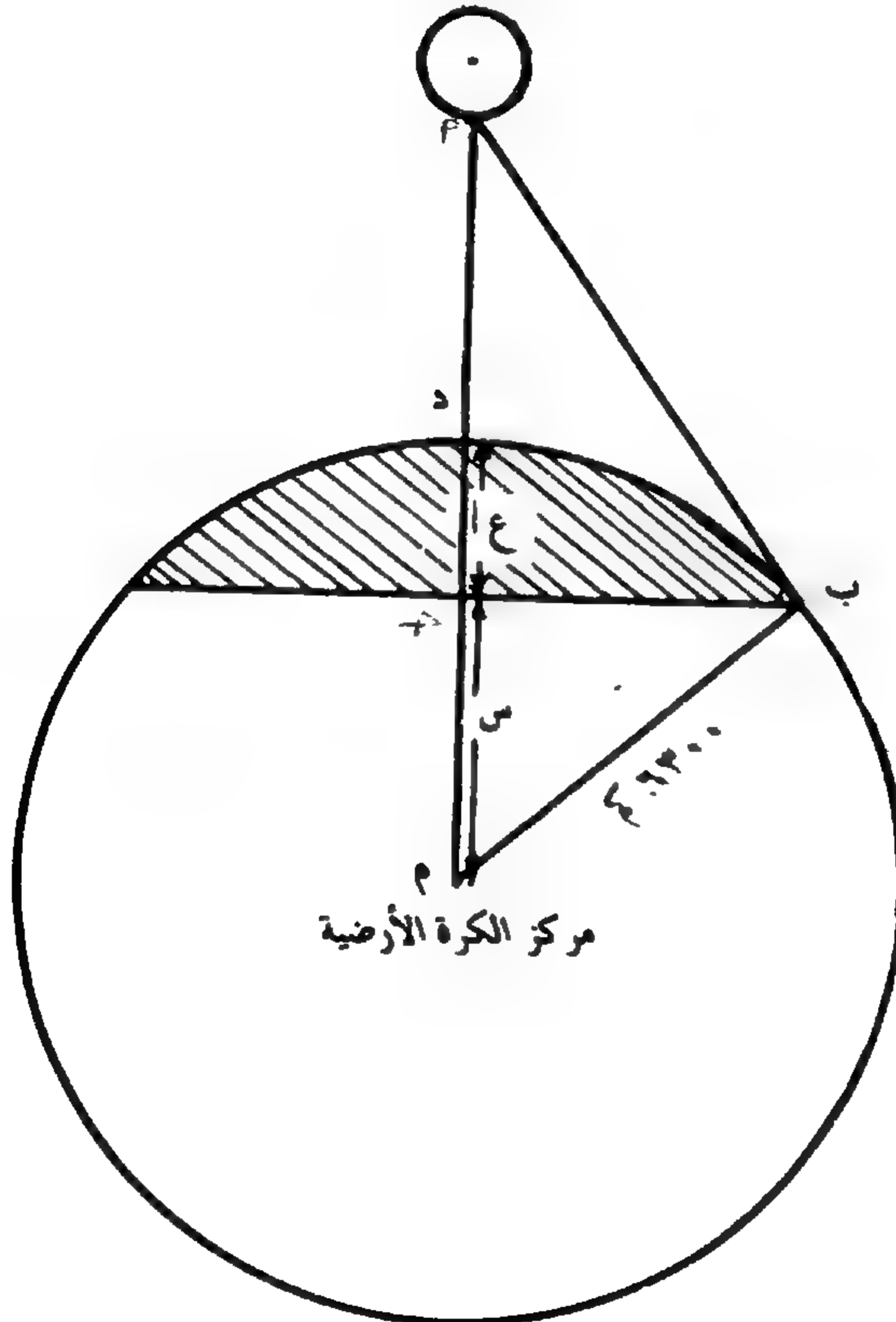
$$١٥٠ \text{ قرشاً} = \frac{٥}{٢٨} \times (٤٢٠ + ٤٢٠) = ٨٤٠ \times \frac{٥}{٢٨} = ١٥٠ \text{ قرشاً.}$$



١٢- أطلق قمر صناعى على إرتفاع ٢٠٠ كم من سطح الأرض فكم تكون المساحة التى يمكن تصويرها من سطح الكرة الأرضية بواسطة أجهزة القمر الخاصة بالتصوير (فى أى لحظة) علما بأن نصف قطر الكرة الأرضية = ٦٣٠٠ كيلو متر ، وكم تبلغ نسبة المساحة المصورة بالنسبة لمساحة سطح الكرة الأرضية..

القمر الصناعى

الحل :



من هندسة الشكل ، الزاوية ا ب م قائمة المسافة م ح = س

المسافة ح د = ع ،

إرتفاع القمر من مركز الأرض = ٦٣٠٠ + ٢٠٠ = ٦٥٠٠ كم

$$\therefore \overline{ب} م^2 = م ح \times م ا .$$

$$\therefore ٦٥٠٠ \times م = ٢(٦٣٠٠) .$$

$$\therefore م = \frac{٦٣٠٠ \times ٦٣٠٠}{٦٥٠٠} = ٦١٠.٦ \text{ كيلو متر تقريبا } .$$

$$\therefore ع = م - د - م ح = ٦١٠.٦ - ٦٣٠٠ = ١٩٤ \text{ كيلو متر تقريبا } .$$

والمساحة التى يمكن لكاميرات تصوير القمر الصناعى تصويرها من سطح الكرة الأرضية عبارة عن طاقة كروية (تقريبا) من سطح الكرة الأرضية ، إرتفاعها = ع = ١٩٤ ولما كانت مساحة الطاقة = ٢ ط نق ع

$$\therefore \text{المساحة الممكن تصويرها} = ٢ ط ١٩٤ \times ٦٣٠٠ \times ١٩٤$$

$$= ٧٦٧٩٣٠.٩$$

$$\approx ٧٦٨٠٠٠٠ =$$

أى سبعة مليون ، ٦٨٠ ألف كيلو متر مربع تقريبا وهى تعادل حوالى سبعة أضعاف مساحة جمهورية مصر العربية ولما كانت مساحة سطح الكرة الأرضية = $٤ (٦٣٠٠) ط \approx ٤٩٨٧٥٩٠٠٠ \text{ كم}^2$ أى حوالى ٥٠٠ مليون كيلو متر مربع .

$$\therefore \text{نسبة المساحة المصورة} = \frac{٧٦٧٩٣٠.٩}{٤٩٨٧٥٩٠٠٠} \approx ٠,٠١٥٤$$

أى حوالى ١,٥٤٪ من مساحة سطح الكرة الأرضية .



١٣- على أى إرتفاع يجب وضع قمر صناعى فى مدار حول الأرض لكى يمكنه تغطيته ($\frac{1}{10}$) من مساحة سطح الكرة الأرضية للإرسال الإذاعى والتليفزيونى (فى أى لحظة) ، نصف قطر الكرة الأرضية = ٦٣٠٠ كيلو متر تقريبا .

◀ الحل :

مساحة سطح الكرة الأرضية كما رأينا فى المسألة السابقة = $٤٩٨,٧٥٩,٠٠٠ \text{ كم}^2$ $\therefore \frac{1}{10}$ من هذه المساحة = $٤٩,٨٧٥,٩٠٠ =$ مساحة طاقة كروية مجهول إرتفاعها وبالرجوع للرسم بالمسألة السابقة يكون المجهول هو المسافة (م ا) أى إرتفاع القمر عن مركز الكرة الأرضية .

$$\therefore 49,875,900 = 2 \text{ ط} \times 6300 \text{ ع}$$

$$\therefore \text{ع} = 1260 \text{ كيلو متراً .}$$

$$\therefore \text{المسافة م ح} = \text{س} = 6300 - 1260 = 5040 \text{ كم .}$$

$$\text{ب م}^2 = \text{م ح} \times \text{م ا} .$$

$$\therefore 26300 = 5040 \times \text{م ا} .$$

$$\therefore \text{م ا} = 7875 \text{ كم .}$$

$$\therefore \text{ا د وهو إرتفاع القمر} = 7875 - 6300$$

$$= 1575 \text{ كيلو متراً من سطح الأرض .}$$



١٤- في إحدى الحفائب المخصصة لرجال الأعمال كان القفل ذو الأرقام لهذه الحقيبة يتكون من أربعة بكرات ومُدرج على محيط كل بركة منها عشرة أرقام من صفر وحتى رقم ٩ ، فإذا كانت الحقيبة مغلقة ونسى صاحبها الرقم السرى الذى تفتح به الحقيبة . فهل لك أن تدلنا ، كم محاولة منك ، يمكنك عملها لفتح هذا القفل وباعتبار أن كل محاولة ستستغرق منك ٣ ثوان فقط . وهل بإمكانك فتحها خلال نصف ساعة وبما نسبة الإحتمال لفتحها حينئذ ؟

◀ الحل :

علينا أولاً أن نحسب العدد الكلى من تراكيب الأرقام التى يمكن تكوينها فى هذه الحالة ، فكل رقم من العشرة أرقام الموجودة على البكرة الأولى (من اليسار) ، يأتى معه أياً من العشرة أرقام الموجودة على البكرة الثانية ، وهذا يعطينا عدد من تراكيب الأرقام بالنسبة للبكرتين الأولى والثانية =

$$= 10 \times 10 = 100 \text{ رقم}$$

ولكل رقم من المائة رقم هذه يمكننا أن نركب معها رقم من الأرقام العشرة الموجودة على البكرة الثالثة .

وعلى هذا فعدد تراكيب الأرقام المحتملة للثلاث بكرات (الأولى والثانية والثالثة من اليسار) = $10 \times 10 \times 10 = 1000$ رقم

ومن هنا نصل إلى أن عدد التراكيب التى يمكن تكوينها من أرقام الأربعة بكرات الأولى = $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ أى عشرة آلاف رقم.

ولما كان تركيب كل عدد من العشرة آلاف هذه [كل عدد يتكون من ٤ خانات آحاد وعشرات ومئات وألوف] يستغرق زمناً قدره ٣ ثوان .
... فالأمر يحتاج إلى : $30000 = 3 \times 10000$ ثانية

أى : $\frac{30000}{60 \times 60} = \frac{30}{8}$ أى حوالى يوم عمل كامل
وعلى هذا فاحتمال فتحها فى خلال نصف ساعة :

$\frac{30}{8} \div \frac{30}{8} = \frac{1}{8} = 12.5\%$
وطبعاً هذا لا يمنع من احتمال فتحها من أول محاولة أو بعد عشر محاولات
مثلاً وليس شرطاً بعد انقضاء عشرة آلاف محاولة .



١٥- أوصى رجل على فراش الموت بأن توزع ثروته بعد وفاته على أبنائه الأربعة ، بترتيب تنازلى ، أى الأكبر له نصيب أكثر والأصغر له أقل وهكذا ، ويعطى ما يتبقى للمربية والخدم ، وكانت وصيته كالتالى :

الأول يأخذ نصف ثروة والده + ١ جنيه

والثانى يأخذ نصف ما يتبقى + ١ جنيه

والثالث يأخذ نصف ما يتبقى + ١ جنيه

والرابع يأخذ نصف ما يتبقى + ١ جنيه

ويوزع الباقي والبالغ ٣٠٠٠ على المربية والخدم .

فكم كانت ثروة الوالد وما نصيب كل من الأبناء الأربعة .

◀ الحل :

نفرض أن مقدار الثروة = س جنيهاً

... نصيب الابن الأكبر $= 1 + \frac{س}{2} = \frac{س+2}{2}$ جنيهاً (١)

، نصيب الابن الثانى $= \frac{1}{2} [\frac{س+2}{2} - س] + 1$

$$(٢) \quad \text{جنيهاً} \frac{٢ + س}{٤} = \frac{٤}{٤} + \frac{٢ - س}{٤} = ١ + \left[\frac{٢ - س}{٢} \right] \frac{١}{٢} =$$

$$، نصيب الابن الثالث = \frac{١}{٢} \left[س - \frac{٢ + س}{٢} - \frac{٢ + س}{٤} \right] + ١ =$$

$$= \frac{١}{٢} \left[\frac{٤س - ٢ - س - ٢ - س - ٤}{٤} \right] + ١ =$$

$$(٣) \quad \text{جنيهاً} \frac{٢ + س}{٨} = \frac{٨}{٨} + \frac{٦ - س}{٨} =$$

$$، نصيب الابن الرابع = \frac{١}{٢} \left[س - \frac{٢ + س}{٢} - \frac{٢ + س}{٤} - \frac{٢ + س}{٨} \right] + ١ =$$

$$= \frac{١}{٢} \left[\frac{٨س - ٢ - س - ٢ - س - ٤ - س - ٢ - س - ٨}{٨} \right] + ١ =$$

$$(٤) \quad \text{جنيهاً} \frac{٢ + س}{١٦} = \frac{١٦}{١٦} + \frac{١٤ - س}{١٦} =$$

∴ مقدار الثروة = مجموع المبالغ في المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) مضافاً إليها مبلغ الـ ٣٠٠٠ جنيهاً المتروكة للمربية والخدم .

$$∴ س = \frac{٢ + س}{٢} + \frac{٢ + س}{٤} + \frac{٢ + س}{٨} + \frac{٢ + س}{١٦} + ٣٠٠٠$$

$$= \frac{٨س + ١٦س + ٤س + ٢س + ٤٨٠٠٠}{١٦}$$

ومنها س = ٤٨٠٣٠ جنيهاً .

$$\text{فالأول نصيبه} = \frac{٢ + ٤٨٠٣٠}{٢} = ٢٤٠١٦ \text{ جنيهاً .}$$

$$\text{والثاني نصيبه} = \frac{٢ + ٤٨٠٣٠}{٤} = ١٢٠٠٨ \text{ جنيهاً}$$

$$\text{والثالث نصيبه} = \frac{٢ + ٤٨٠٣٠}{٨} = ٦٠٠٤ \text{ جنيهاً}$$

$$\text{والرابع نصيبه} = \frac{٢ + ٤٨٠٣٠}{١٦} = ٣٠٠٢ \text{ جنيهاً}$$

إجمالي أنصبة الأبناء = ٤٥٠٣٠ جنيهاً

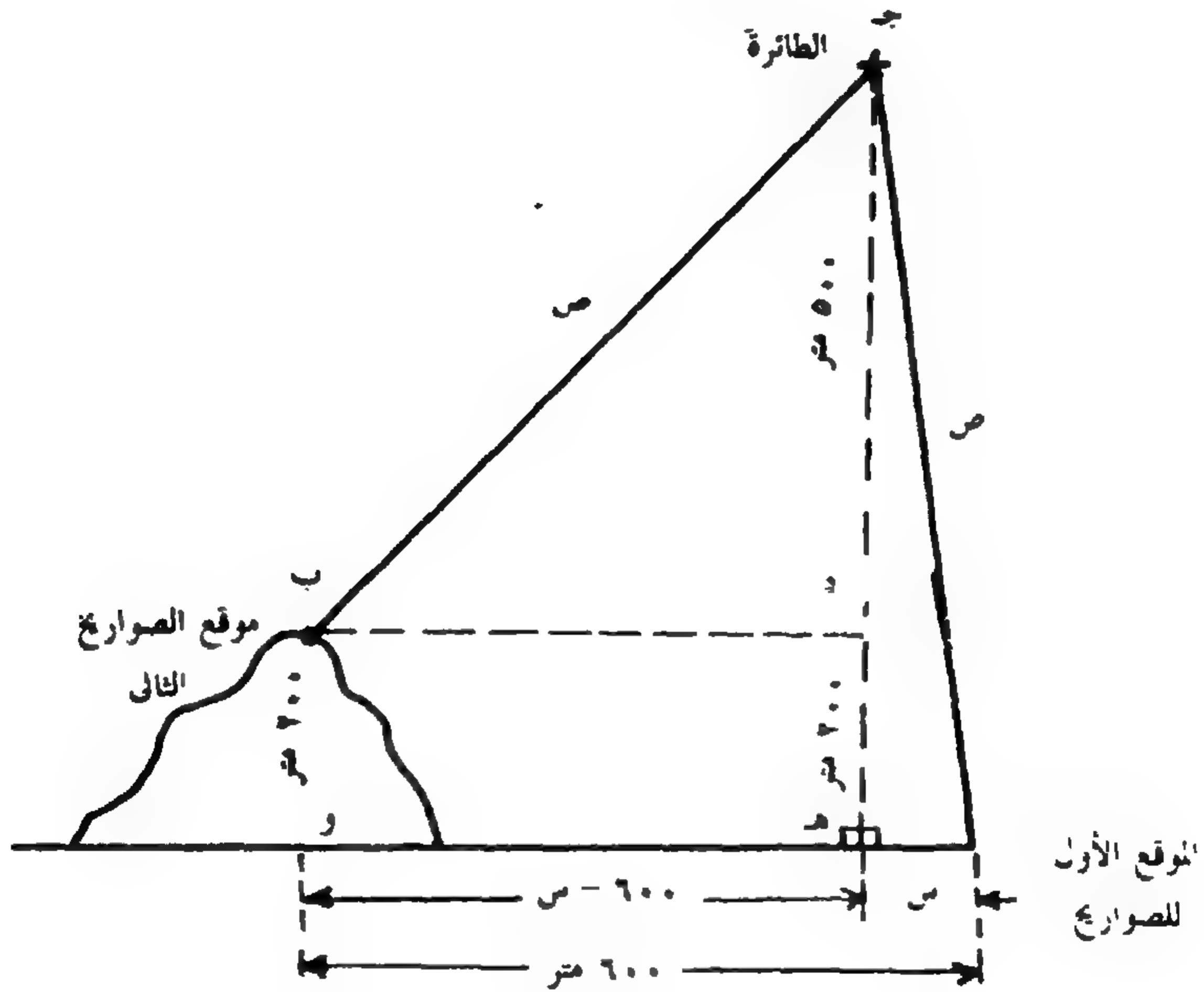
نصيب المربية والخدم = ٣٠٠٠ جنيهاً

، إجمالي الثروة = ٤٥٠٣٠ + ٣٠٠٠ = ٤٨٠٣٠ جنيهاً

١٦- موقعا صواريخ مضادة للطائرة المعادية ، تبلغ المسافة فيما بينهما ٦٠٠ متر ، ظهرت فجأة طائرة معادية فوق الخط الأفقى الواصل بينهما وكان أحد الموقعين فى مستوى سطح البحر والآخر يرتفع ٢٠٠ م عن سطح البحر ، فأطلق عليها فى نفس الوقت صاروخان من الموقعين ومن نفس النوع فأصاباها فى نفس اللحظة ،

المطلوب حساب المسافة الأفقية بين موقع الطائرة على الأرض لحظة الإصابة وبين موقعى الصواريخ .

◀ الحل :



إذا رمزنا للمسافة بين الموقع الأول والطائرة بالرمز ص .
فإن المسافة ب ج وهى التى يقطعها الصاروخ من الموقع الثانى ، تساوى أيضاً ص وذلك لأن الصاروخين من نفس النوع إنطلقا فى نفس الوقت وأصابا الطائرة ج فى نفس الوقت وعليه فإن المسافة التى يسيرها كل من الصاروخين واحدة ومن هندسة الشكل نجد أن :

في المثلث ا ج د هـ :

$$\text{ص}^2 = (٧٠٠)^2 + \text{س}^2 \dots\dots\dots (١)$$

، في المثلث ج د ب د :

$$\text{ص}^2 = (٥٠٠)^2 + (\text{س} - ٦٠٠)^2 \dots\dots\dots (٢)$$

من (١) ، (٢) :

$$\therefore (٧٠٠)^2 + \text{س}^2 = (\text{س} - ٦٠٠)^2 + \text{ص}^2$$

$$\therefore ٤٩ \times ٤١٠ + \text{س}^2 = ٢٥ \times ٤١٠ + ٣٦ \times ٤١٠ + \text{س}^2 - ١٢٠٠ \text{س}$$

ومنها ١٢٠٠ س = ٦١ - ٤٩ \times ٤١٠

$$\therefore \text{س} = ١٢ \div ٤١٠ \times ١٢ = ١٠٠ \text{ متر}$$

\therefore فُبعد مسقط الطائرة على الأرض عن الموقع الأول = ١٠٠ متراً .

، وبعد مسقط الطائرة على الأرض عن الموقع الثاني .

$$= ١٠٠ - ٦٠٠ = ٥٠٠ \text{ متراً}$$



١٧- في إحدى سباقات الدراجات ، تحرك المتسابقون من نفس النقطة وبسرعات منتظمة لكل منهم ، فكان الثاني يسير بسرعة أقل من سرعة الأول بمقدار ٦ كم/ساعة ، وهو في ذات الوقت يسير بسرعة أكبر من سرعة الثالث بأربعة كيلومترات / ساعة .

وقد وصل المتسابق الثاني إلى خط نهاية السباق بعد وصول الأول بنصف ساعة وقبل وصول الثالث بنصف ساعة كذلك .

والمطلوب منك معرفة : (أ) طول مسافة السباق

(ب) سرعة كل متسابق

(ج) الزمن اللازم لإنهاء السباق لكل متسابق على حده .

◀ الحل :

بالنظر لهذه المسألة بإمكاننا نجد أن بها عدداً كبيراً من المجاهيل إلا أنه بقليل من الحيلة يمكننا الحل كما يلي :

نفرض أن سرعة المتسابق الثاني = (س) كيلومتراً / ساعة

\therefore سرعة المتسابق الأول = (س + ٦) كيلومتراً/ساعة

، سرعة المتسابق الثالث = (س - ٤) كيلومتراً/ساعة

ولنفترض كذلك أن مسافة السباق = ص كيلومتراً

$$\text{، زمن السباق للمتسابق الأول} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} + ٦} \text{ ساعة .}$$

$$\text{، زمن السباق للمتسابق الثاني} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ ساعة}$$

$$\text{، زمن السباق للمتسابق الثالث} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - ٤} \text{ ساعة}$$

وحيث أن المتسابق الثاني يصل بعد الأول لخط النهاية ، بنصف ساعة .

$$\therefore \text{زمن سباق الأول} = \text{زمن سباق الثاني} - \frac{١}{٢} \text{ ساعة}$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س} + ٦} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} - \frac{١}{٢}$$

$$\text{ومنها} \frac{\text{ص}}{\text{س} + ٦} = \frac{٢ \text{ ص} - \text{س}}{٢ \text{ س}}$$

$$\therefore ٢ \text{ س ص} = ٢ \text{ س ص} - \text{س} + ١٢ \text{ ص} - ٦ \text{ س}$$

$$\therefore ٢ \text{ س} + ٦ \text{ س} - ١٢ \text{ ص} = \text{صفر} \dots\dots\dots (١)$$

$$\text{، زمن سباق الثاني} = \text{زمن سباق الثالث} - \frac{١}{٢} \text{ ساعة}$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - ٤} - \frac{١}{٢}$$

$$\text{ومنها} \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٢ \text{ ص} - \text{س} + ٤}{٨ - ٢ \text{ س}}$$

$$\text{أى } ٢ \text{ س ص} - ٨ \text{ ص} = ٢ \text{ س ص} - \text{س} + ٤ \text{ س}$$

$$\therefore ٢ \text{ س} - ٤ \text{ س} - ٨ \text{ ص} = \text{صفر} \dots\dots\dots (٢)$$

وبحل المعادلتين (١) ، (٢)

$$\therefore ٢ \text{ س} + ٦ \text{ س} - ١٢ \text{ ص} = \text{صفر} \dots\dots\dots (١)$$

$$\text{س}^2 - 4 \text{ س} - 8 \text{ ص} = \text{صفر} \dots\dots\dots (2)$$

ب طرح (2) من (1) $\therefore 10 \text{ س} - 4 \text{ ص} = \text{صفر}$

$$\text{ومنها ص} = \frac{5 \text{ س}}{2} \dots\dots\dots (3)$$

بالتعويض عن قيمة ص من (3) في المعادلة (2)

$$\therefore \text{س}^2 - 4 \text{ س} - 8 = \frac{5 \times 8 \text{ س}}{2} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{س}^2 - 24 \text{ س} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{س} (\text{س} - 24) = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{إما س} = \text{صفر}$$

وهذا مرفوض وإما س = 24 كيلومتراً / ساعة

$$\therefore \text{سرعة الثاني} = 24 \text{ كم / س}$$

$$\text{، سرعة الأول} = 30 \text{ كم / س} (\text{س} + 6)$$

$$\text{، سرعة الثالث} = 20 \text{ كم / س} (\text{س} - 4)$$

ومن المعادلة (3) :

$$\therefore \text{مسافة السباق ص} = \frac{5 \text{ س}}{2} = \frac{24 \times 5}{2} = 60 \text{ كيلومتراً .}$$

ويكون الزمن اللازم لإنهاء السباق بالنسبة للمتسابق الأول =

$$2 \text{ ساعة} = \frac{60}{24+30}$$

$$\text{وزمن السباق للثاني} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{60}{24} = 2,5 \text{ ساعة}$$

$$\text{، زمن السباق للثالث} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{60}{4-24} = 3 \text{ ساعة}$$



١٨- في إحدى المناسبات تقابل عدد غير معروف من الأشخاص وتم التصادف بينهم جميعاً بالأيدى وعند إحصاء عدد مرات التصادف تبين أنها ٣٦ مصافحة ، هل يمكنك معرفة عدد الأشخاص المجتمعين في هذه المناسبة .

◀ الحل :

نفترض أن عدد الأشخاص المجتمعين = س

ولو تابعنا أحد هؤلاء المجتمعين سنجد أنه يصافح كل المجتمعين (فيما عداه طبعاً) ، فلو تصورنا مثلاً أن عدد المجتمعين ٢٠ شخصاً فإن أى واحد منهم سيصافح تسعة عشر شخصاً ، أى عدد المجتمعين ناقصاً واحد .

أى (س - ١)

وكل واحد من الـ س شخص المجتمعين سيصافح (س - ١) شخصاً أو (س - ١) مرة . كذلك

∴ فعدد مرات التصافح = س (س - ١) مرة .

ولكن لا يغيب عن الذهن أنه عندما يصافح محمد مثلاً أحمد فإن أحمد في ذات الوقت يُصافح محمد (تصافح مكرر) .

وعلى هذا فعدد المصافحات الفعلية = $\frac{س (س - ١)}{٢}$

وفي مسألتنا هذه :

$$\frac{س (س - ١)}{٢} = ٣٦$$

$$\therefore س^٢ - س - ٧٢ = ٠ \text{ صفر ومنها :}$$

$$(س - ٩) (س + ٨) = ٠ \text{ صفر}$$

$$\therefore س = ٩ \text{ أشخاص وطبعاً } س = ٨ \text{ جواب مرفوض}$$

وعليه فإن عدد الأشخاص المجتمعين = ٩

$$[٣٦ = \frac{٨ \times ٩}{٢}] ،$$

ويمكن الحل بطريقة أخرى فالمطلوب هو عمل توافق بين ن من الأشخاص

إثنان إثنان ، وعدد التوافق = ٣٦

$$\therefore ن ق = ٣٦$$

$$\therefore \frac{ن (ن - ١)}{١ \times ٢} = \frac{ن (ن - ١)}{٢} = ٣٦$$

وهي تؤدي لنفس الجواب حيث أننا سنحصل على ن = ٩

١٩- في أحد الأعياد تبادل عدد غير معروف من الأصدقاء إرسال بطاقات التهنئة وعند إحصائها تبين أنها ١٣٢ بطاقة متهمة ، هل لك أن تدلنا ، كم عدد الأصدقاء المتراسلين .

◀ الحل :

بنفس طريقة حل المسألة السابقة ،
لو افترضنا أن عدد الأصدقاء = س
فإن كل شخص من المجموع س سيرسل عدد من بطاقات التهنئة ، يبلغ عددها : (س - ١) .
وفي نفس الوقت كل شخص من المجموع س سيتلقى عدد من بطاقات التهنئة قدرها (س - ١) .

$$\text{وعليه فإن عدد بطاقات التهنئة} = \left[\frac{\text{س}(\text{س} - ١)}{٢} \right] \times ٢$$

$$\therefore ١٣٢ = \text{س}(\text{س} - ١) = \text{س}^٢ - \text{س}$$

$$\therefore \text{س}^٢ - \text{س} - ١٣٢ = \text{صفر}$$

$$\therefore (\text{س} - ١٢)(\text{س} + ١١) = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{س} = ١٢ \text{ صديق .}$$

يمكن الحل بالتبادل كالتالي :

$$١٣٢ = \text{ن}^٢ = \text{ن}(\text{ن} - ١)$$

$$\therefore \text{ن}^٢ - \text{ن} - ١٣٢ = \text{صفر ومنها } \text{ن} = ١٢ \text{ وهو عدد الأصدقاء المتراسلين}$$



٢٠- يركب بكل السيارات بدون استثناء جهاز قياس لتحديد المسافات المقطوعة بواسطة السيارة ، لتقدير عمرها ولعمل معدلات للصيانة والإصلاح اللازمة . وتركب معظم العدادات من ترس يدار بواسطة ترس دودي فيدير بدوره مجموعة من المستنات أو الطبلات أو البكرات عددها

سنة غالباً وهي تسجل المسافة المقطوعة بعشرات الألوف من الكيلومترات .
والسؤال الآن كالاتي :

قراءة عداد المسافة بإحدى السيارات مسجل بها القراءة الآتية :

٨٧٦٥٤٣

فهل يمكنك حساب عدد الدورات الكلية التي دارتها البكرات الست
وكم دورة دارتها كل بكرة منها .

◀ الحل :

القراءة المسجلة عبارة عن ست أرقام ، الرقم الأول من اليمين يمثل مئات
الأمتار ، الرقم الثاني (من اليمين أيضاً) يمثل آحاد الكيلومترات الرقم الثالث
(على البكرة الثالثة) يمثل عشرات الكيلومترات ، والرابع يمثل مئات
الكيلومترات ، والخامس يمثل آلاف الكيلومترات ، والسادس يمثل عشرات
آلاف الكيلومترات .

وعلى هذا فالرقم المسجل عبارة عن $\frac{3}{10}$ ٨٧٦٥٤ كيلو متر .

... ، واحد كيلو متر = ١٠٠٠ متر
... فكل عشر دورات للبكرة الأولى تكون السيارة قد سارت خلالها
١٠ × ١٠٠ متر = ١ كيلومتر وعليه تدور البكرة الثانية دورة واحدة .
وكل ١٠٠ دورة للبكرة الأولى تدور الثانية ١٠ دورات والثالثة تدور دورة واحدة
[لكل عشر دورات من الثانية] .

وكل ١٠٠٠ دورة للبكرة الأولى تدور الثانية ١٠٠ دورة والثالثة عشر
دورات والرابعة دورة واحدة [لكل عشر دورات من الثالثة] .

وكل ١٠٠٠٠ دورة للأولى تدور الثانية ١٠٠٠ دورة والثالثة ١٠٠ دورة
والرابعة عشر دورات والخامسة دورة واحدة [لكل عشر دورات من الرابعة]
وكل ١٠٠٠٠٠ دورة للأولى تدور الثانية ١٠٠٠٠ دورة والثالثة ١٠٠٠ دورة
والرابعة ١٠٠ دورة والخامسة عشر دورات وتطور السادسة دورة
واحدة [لكل عشر دورات من الخامسة] .

وبطريقة سهلة يمكننا حساب عدد الدورات لكل بكرة كالتالى : تُحوّل المسافة الكلية إلى مئات الأمتار للحصول على عدد دورات البكرة الأولى من اليمين :

عدد الكيلومترات الصحيحة = 876040 كيلومتراً

$$= 87604 \times \frac{1000}{100} = 876040 \text{ مرة مئات أمتار}$$

وعليه فإن عدد دورات البكرة الأولى =

$$876040 + 3 \text{ (قراءة البكرة الأولى)} = 876043 \text{ دورة .}$$

[876043 دورة هو نفس عدد دورات كابل عداد السرعة الموصل فيما بين صندوق السرعات والعداد] .

، عدد دورات البكرة الثانية ، واضح أنه يساوى عدد الكيلومترات الصحيحة المقطوعة بواسطة السيارة لأن هذه البكرة تمثل آحاد الكيلومترات .
∴ فعدد دورات البكرة الثانية = 87604 دورة .

وهكذا ،

عدد دورات البكرة الثالثة = 8760 دورة صحيحة .

وقد أهملنا الكسر $(0,4)$ لأنه يعنى أنه بعد ٦ دورات للبكرة الثانية من الآن سينقلب الرقم ٥ على اليمين من دورات البكرة الثالثة إلى الرقم ٦ .
، عدد دورات البكرة الرابعة = 876 دورة صحيحة .

وقد أهملنا الكسر $(0,5)$ لأنه يعنى أنه بعد ٥ دورات من البكرة الثالثة من الآن سوف ينقلب الرقم ٦ على اليمين من دورات البكرة الرابعة ويصبح ٧ .
، عدد دورات البكرة الخامسة = 87 دورة صحيحة .

، عدد دورات البكرة السادسة = 8 دورة صحيحة .

وعلى هذا يصبح مجموع الدورات الكلية لكل البكرات عندما تقطع السيارة مسافة سبعة وثمانون ألفاً وستمائة أربعة وخمسون وثلاث أعشار كيلومتراً مساوياً : $876043 + 87604 + 8760 + 876 + 87 + 8$

$$= 973933 \text{ دورة كاملة صحيحة .}$$

وهو رقم يقترب من المليون دورة .

يضاف إليها كسور الدورات بالترتيب التالى :

$$٢,٥ = ٠,٧ + ٠,٦ + ٠,٥ + ٠,٤ + ٠,٣$$

على صورة كسور دورات لكل البكرات ما عدا الأخيرة على اليسار .

٩ ٠ ١	٩ ٠ ١	٩ ٠ ١	٩ ٠ ١	٩ ٠ ١	٩ ٠ ١
عشرات الالف من الكيلو مترات	ألف	مئات	عشرات	احاد	مئات الأمطار
٠	٠	٠	٠	٠	١
٠	٠	٠	٠	١	١٠
٠	٠	٠	١	١٠	١٠٠
٠	٠	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠
٠	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠
١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠

ويوضح الرسم بكرات عداد المسافة بالسيارة وعدد دورات كل بكرة بالنسبة للبكرات الأخريات .



٢١- إذا أردنا أن نضع نظاماً لأرقام التليفون بأحد الأقاليم أو المدن الصغيرة ذات عدد سكان (٥٠,٠٠٠) خمسون ألف نسمة .

فما هو أقصى عدد لأرقام التليفونات بهذه المدينة .

◀ الحل :

حيث أن عدد السكان حوالى ٥٠,٠٠٠ نسمة ، لذلك فنحن فى أحسن ظروف للخدمة التليفونية فعلينا وضع نظام أرقام ذو خمس خانات أى مكونات من خمسة أرقام .

ولما كان قرص التليفون مكوناً من عشر أرقام من صفر وحتى ٩ فإننا بهذا يمكننا أن نسجل عدداً من الأرقام لهذه المدينة كالتالى :

الخانة الأولى من اليمين لأى رقم مشترك يمكن أن تكون إما صفراً أو واحد أو اثنين وحتى ٩ أى عشر أرقام بخانة الآحاد .
ولكل رقم من أرقام خانة الآحاد يوجد عشرة أرقام يمكن شغلها بخانة العشرات ،

وعلى هذا فالخانة الأولى والثانية على اليمين يمكن أن يكونوا :
 10×10 أى مائة رقم .

ولكل رقم من هذه المائة يمكن أن يأتى عدد من الأرقام من صفر وحتى ٩ بالخانة الثالثة (خانة المئات) .

وعلى ذلك فعدد الأرقام التى يمكن شغلها بخانة الآحاد والعشرات والمئات هو $10 \times 10 \times 10$ أى ألف رقم .

وهكذا حتى خانة عشرات الألوف وهى الخانة الخامسة فعدد الأرقام التى يمكن أن تشغلها من ١ وحتى ٩ [لا يبدأ الرقم بصفر فى حالة رقم تليفون ذو خمسة أرقام] أى تسعة أرقام فقط وليس عشرة .
وعلى هذا فعدد الأرقام الممكن تكوينها من هذا النظام =
 $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 9 = 90,000$ تسعون ألف رقم .

ملاحظة : يوضع النظام طبقاً لهذا ، وفى حالة قلة عدد المشتركين فإنه يمكن تثبيت أو توحيد رقم بالخانة الأخيرة على اليسار فمثلاً فى حالتنا هذه وعدد المشتركين بالطبع أقل من ٥٠,٠٠٠ بكثير فإنه يكفى أن نجعل الرقم الأول من على اليسار ١ أو ٢ أو من ١ إلى ٢ .

ففى الحالة الأولى يكون عدد الخطوط هو

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 1 = 10,000 \text{ خط}$$

وتكون أكبر قراءة لرقم تليفون بهذه المدينة هى ١٩٩٩٩

وفى حالة الرقم الأيسر ٢ فقط .

فإن عدد الخطوط = $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 2$ (خانة واحدة)

$$= 20,000 \text{ خط}$$

ويكون أقل رقم تليفون بهذه المدينة هو ٢٠,٠٠٠ أى عشرون ألف .

بينما أكبر رقم تليفون يكون ٢٩٩٩٩ أى تسعة وعشرون ألفاً وتسعمائة تسعة وتسعون .

وفي الحالة الثانية وهى عندما نأخذ الخانة الأخيرة على اليسار الرقم ١ إلى ٢ أى رقمان قد يكون واحداً وقد يكون اثنين :

فإن عدد الأرقام المتاحة فى هذه الحالة =

$$٢٠٠٠٠ = ٢ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠$$

ويكون أصغر رقم تليفون بهذه المدينة هو ١٠٠٠٠ عشرة آلاف .

ويكون أكبر رقم تليفون بهذه المدينة هو ٢٩٩٩٩

وفي حالة أرقام التليفون ذات السبعة خانات ، يكون مجموع أرقام

التليفونات المتاحة هو :

$$٩ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠$$

[الرقم الأيسر لا يبدأ بصفر أى ٩ مليون خط أو رقم تليفون لمشارك وهو يصلح لمدينة كبيرة مثل القاهرة . إلا أنه عادة ما يتم تثبيت أو توحيد الرقم الأيسر فمثلاً يبدأ برقم ٢ ، ٣ فقط [أى رقمين بدلاً من ٩ أرقام] فإن عدد الأرقام المتاحة فى هذه الحالة =

$$٢ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ = ٢ \text{ مليون رقم فقط .}$$

وقد يكون الرقم الأيسر تحديداً لستترال معين أو منطقة سكنية أو حتى محدد فمثلاً رقم ٢ يعنى حى مصر الجديدة ومدينة نصر مثلاً ، رقم ٣ قد يعنى ستترال رمسيس بوسط القاهرة . وهكذا ..

◀ أرقام لوحات المرور للسيارات :

بنفس طريقة التليفونات يمكن توزيع الأرقام لسيارات المحافظات المختلفة وللسيارات العسكرية والحكومية .

والأساس فى تحديد عدد خانات أرقام لوحة السيارة المعدنية هو عدد

السيارات مثلما الحال فى حالة التليفونات فالأساس هو عدد المشتركين .

فلوحة الأرقام ذات الخمسة أرقام ، يكون عدد الأرقام المتاحة : هو

١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٩ أى تسعون ألف رقم مختلف [الرقم الأيسر لا يبدأ بصفر بالطبع] .

وعند زيادة عدد السيارات وخاصة سيارات الركوب لكثرتها يمكن وضع نظام الستة أرقام حيث يكون عدد الأرقام المتاحة :

$$٩٠٠٠٠٠ = ٩ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠$$

رقم مختلف

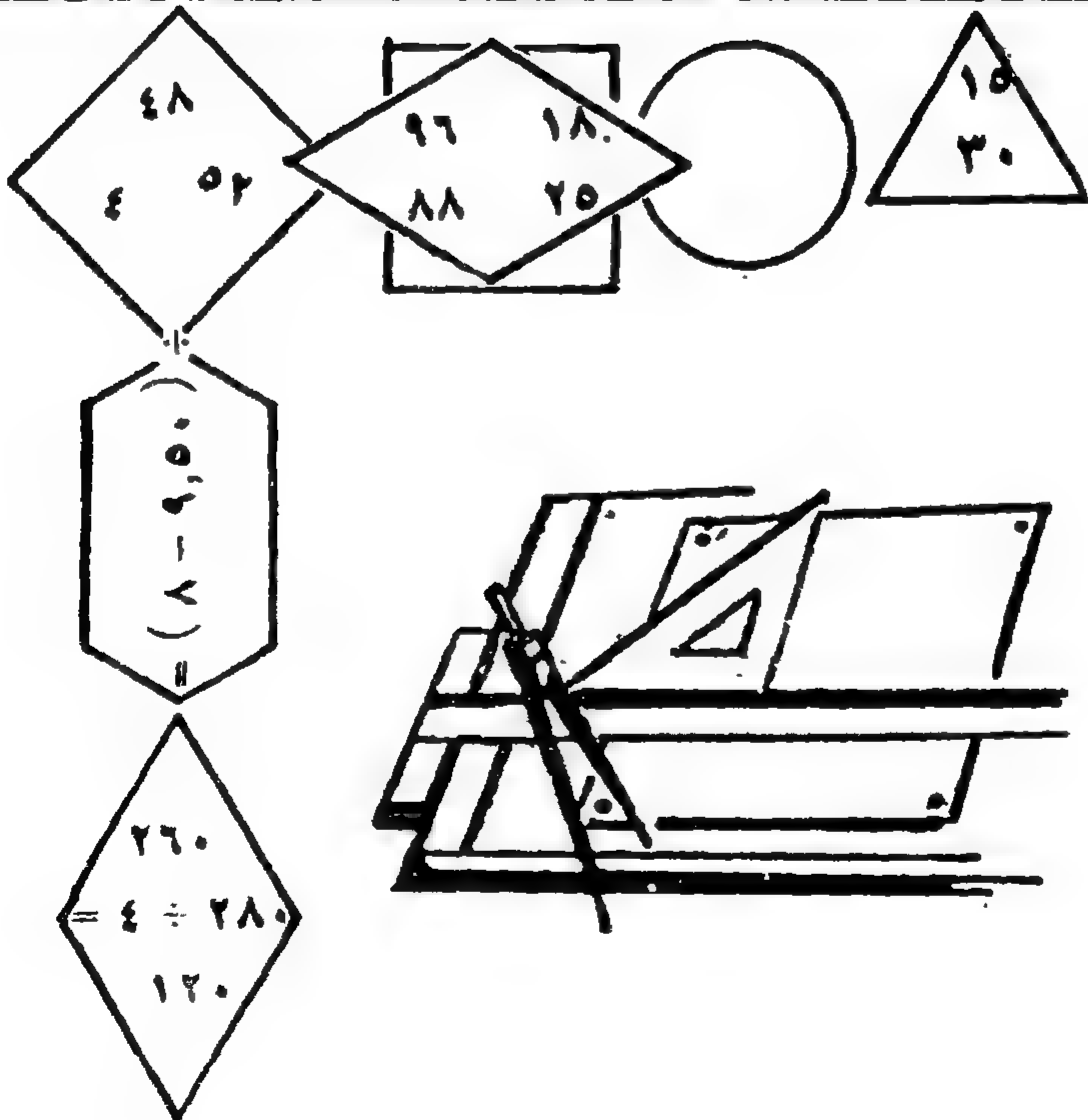
وفي حالة هيئات معينة أو السيارات الحكومية أو القطاع العام .
يمكننا تحديد أو تثبيت رقم الخانة اليسرى الأخيرة بأن نجعله يأخذ قيمة واحدة فقط مثلاً الواحد [بدلاً من ١ إلى ٩] ويمكن أيضاً تثبيت الخانة قبل الأخيرة من اليسار وعلى هذا فلوحة أرقام ذات ستة خانات ، باعتبار الخانتين الأخيرتين ٤٥ مثلاً ، تبدأ الأرقام من ٤٥٠٠٠٠ إلى ٤٥٩٩٩٩ [أى عشرة آلاف رقم فقط] .

$$\text{أى } ٤٥٩٩٩٩ - ٤٥٠٠٠٠ = ٩٩٩٩ \text{ رقم سيارة مختلف}$$



الباب الخامس

فوازير رياضية



١ - ثلاثة أشخاص ، لدى كل منهم مبلغ مختلف عن مبلغ الآخر إلا أن مجموع ما معهم = ٦٠ جنيهاً ،

فإذا أخذنا من الأول مبلغ من المال مساوٍ لما مع الثاني وأضفناه لما مع الثاني ثم أخذنا من الثاني مبلغاً مساوياً لما مع الثالث وأضفناه للثالث ثم أخذنا من الثالث مبلغاً مساوياً لما مع الأول وأضفناه للأول لأصبح كل منهم لديه نفس المبلغ .

فكم تبلغ قيم المبالغ التي كانت مع كل منهم في البداية ، وبدون استعمال معادلات جبرية .
الحل :

لحل هذه المسألة نبدأ الحل بطريقة عكسية أى من النهاية حتى نصل لما كان معهم في البداية ،

في النهاية كان كل منهم معه مبلغاً مساوياً لما مع الآخر = $\frac{60}{3} = 20$ جنيهاً

وقبل هذه الخطوة الأخيرة التي تساوت بموجبها المبالغ مع كل منهم ، ثم إضافة مبلغ ما للشخص الأول مساوٍ لما كان معه قبل الإضافة مباشرة من الشخص الثالث .

وعلى هذا فإن الأول كان معه قبل هذه الخطوة الأخيرة مبلغ ١٠ جنيهاً فقط [ثم أضيف مبلغ مساوٍ أى ١٠ جنيهاً أخرى من الثالث فأصبح مجموع ما معه ٢٠ جنيهاً] .

وحيث أننا أخذنا من الثالث ١٠ جنيهاً وبعدها أصبح معه عشرون جنيهاً . فالبلغ الذي كان معه قبل هذه الخطوة هو ٣٠ جنيهاً .
 أى أن توزيع المبالغ قبل الخطوة الأخيرة كان كالتالى .

الأول	الثاني	الثالث
١٠ -	٢٠	٣٠ - الخطوة قبل الأخيرة
١٠ +		١٠ -
٢٠ -	٢٠	٢٠ - الخطوة الأخيرة

وقبل الخطوة السابقة أخذنا من الثاني مبلغاً من المال مساوٍ لما مع الثالث أى أن مبلغ الثالث تضاعف فأصبح ٣٠ جنيهاً .

ومن البديهي أننا قد أضفنا للثالث ١٥ جنيهاً أخذت من الثاني وعلى هذا فإن توزيع المبالغ معهم في الخطوة التي تسبق الخطوة السابقة كالتالى :

الأول	الثاني	الثالث
١٠	٣٥	١٥

$$(١٥ + ٢٠)$$

وقبل هذا أى في البداية ، أخذنا من الأول مبلغاً يساوى ما مع التالى أى تضاعف مبلغ الثاني .

وعلى هذا فإنه تم أخذ مبلغ ١٧,٥ جنيهاً من الأول أُضيفت للثاني حتى يتضاعف ما مع الثاني ويصبح ٣٥ جنيهاً .

وبناء على ما تقدم فإن توزيع المبالغ كان كالتالى في البداية :

الأول	الثاني	الثالث
٢٧,٥	١٧,٥	١٥
١٠	٣٥	١٥
١٠	٢٠	٣٠
٢٠	٢٠	٢٠



٢ - يبلغ ما مع أحمد وعلى ٣٠٠ جنيهاً ، إلا أن ما مع أحمد يزيد عما مع على بمبلغ ٨٠ جنيهاً فكم مع كل منهم .

◀ الحل :

مجموع ما مع أحمد وعلى هو ثلاثمائة .

، الفرق بين ما مع أحمد وعلى هو ثمانون جنيهاً .

وبناء على هذا فإن ضعف ما مع أحمد يجب أن يساوى

$$٣٨٠ = ٨٠ + ٣٠٠ =$$

∴ ما مع أحمد = $\frac{380}{2} = 190$ جنيهاً .

∴ ما مع علي = $190 - 80 = 110$ جنيهاً .

قد يخطئ البعض ويتصور أن الأول معه 220 .

، والثاني (220 - 300) = 80 ، وهذا خطأ شائع في هذا النوع من المسائل .



٣ - يبلغ مجموع مرتب موظف ما بالإضافة إلى حوافزه الشهرية 260 جنيهاً وكان مرتبه يزيد بمبلغ مائتين جنية عن حوافزه ، فكم يبلغ مرتبه .

◀ الحل :

يجب عدم التسرع بالإجابة بأن المرتب هو 200 جنيهاً بهذا خطأ ولكن وببساطة نذكر أن :

مجموع مرتبه وحوافزه = 260 جنيهاً

فرق مرتبه عن حوافزه = 200 جنيهاً

ومنها نصل إلى أن ضعف مرتبه = 460 جنيهاً

ومنها مرتبة = $\frac{460}{2} = 230$ جنيهاً .

وتبلغ الحوافز حينئذ 260 - 230 = 30 جنيهاً .

والآن نرى بسهولة أن 230 - 30 = 200 وهو الفرق بين المرتب

والحوافز .



٤ - سلتان من البيض مجموع ما بهما من بيض = 470 بيضة فإذا كان

البيض بالسلة الأولى يزيد عما بالسلة الثانية بمقدار 300 بيضة .

فما مقدار البيض بكل سلة .

◀ الحل :

مجموع البيض بالسلتين = 470 بيضة

الفرق بين البيض بالسلتين = 300 بيضة

وهذا يعنى أن ضعف الموجود بالسلة الأولى

$$= 470 + 300 = 770 \text{ بيضة}$$

$$\therefore \text{الموجود بالسلة الأولى} = \frac{770}{2} = 385 \text{ بيضة}$$

$$\therefore \text{البعض الموجود بالسلة الثانية} = 470 - 385 = 85 \text{ بيضة .}$$

$$\text{وواضح جلياً أن } 300 = 85 - 385$$



٥ - سار محمد بدراجته بسرعة تبلغ ١٠ كم/ساعة ، فوصل إلى المكان المحدد ، في الساعة السادسة مساءً .

وعندما سار بسرعة ٢٠ كم/ساعة من نفس نقطة البداية وصل إلى نفس المكان الساعة الرابعة مساءً .

فهل يمكنك معرفة السرعة التي يجب أن يسير بها حتى يصل إلى نفس المكان المحدد في تمام الساعة الخامسة مساءً .

◀ الحل :

طبعاً لو إعتقدنا أن السرعة المطلوبة هي متوسط سرعتين ١٠ ، ٢٠ كم أى $\frac{10 + 20}{2} = 15 \text{ كم/ساعة}$ ؛ فهذا خطأ ، ولكن كيف لا يكون كذلك .

نفترض أن المسافة المطلوب سيرها إلى المكان المحدد = س كيلومتر

والآن ، إذا سار محمد بسرعة ١٠ كم/ساعة فإن المسافة س

تستلزم منه وقتاً = $\frac{س}{10}$ ساعة .

وإذا سار بسرعة ٢٠ كم/ساعة فإن المسافة س تستغرق وقتاً

قدره $\frac{س}{20}$ ساعة .

فإذا سار فرضاً بسرعة ١٥ كم/ساعة

فإنه يحتاج وقتاً لقطع هذه المسافة = $\frac{س}{15}$ ساعة

ومما سبق يجب أن يكون :

$$\frac{س}{١٥} \times ٢ = \frac{س}{٢٠} + \frac{س}{١٠}$$

$$\text{أى } \frac{٨ س}{٦٠} = \frac{٣ س}{٦٠} + \frac{٦ س}{٦٠}$$

$$\text{أى } \frac{٨}{٦٠} = \frac{٩}{٦٠}$$

وواضح أن الطرفين غير متساويين وعليه فالسرعة ١٥ كم/س ليست السرعة المطلوب السير بها .

ولندرس حالة ما إذا سار محمد بسرعة ٢٠ كم/ساعة :

فهو إذا سار بهذه السرعة على الطريق لمدة زمنية تزيد ساعتين أى [الساعة السادسة ناقص الساعة الرابعة] ، أى بنفس الزمن عندما يسير بسرعة ١٠ كم/ساعة فإنه يقطع مسافة تزيد ب : $٢ \times ٢٠ = ٤٠$ كم ، على ما يقطعه ولما كان محمد يقطع ١٠ كم فى الساعة أكثر من الحالة الأولى (١٠ كم/ساعة) فإن هذا يعنى أنه سيمكث على الطريق زمناً قدره $\frac{٤٠}{١٠} = ٤$ ساعات .

ومما سبق فإنه يمكن تحديد زمن الرحلة عندما كانت السرعة ٢٠ كم/س

$$\text{فهى } ٢ - ٤ = ٢ \text{ ساعة}$$

$$\text{والمسافة المقطوعة فعلاً } = ٢ \times ٢٠ = ٤٠ \text{ كم/ساعة}$$

∴ فالسرعة التى يجب أن يسير بها للوصول للمكان المحدد الساعة الخامسة أو بمعنى آخر لكى يقطع المسافة فى ٣ ساعات [٢ + ١]

$$= \frac{٤٠}{٣} = \frac{١}{٣} \times ١٣ \text{ كم/ساعة}$$

وبناء على ما تقدم فإن المسألة تصبح بوضوح كالآتى :

يخرج محمد الساعة ٢ ظهراً ويسير بسرعة ١٠ كم/س ويسير ٤٠ كم

[فى زمن ٤ ساعات]

، يخرج محمد الساعة ٢ ظهراً ويسير بسرعة ٢٠ كم/س ويسير ٤٠ كم

[فى زمن ٢ ساعة]

أو يخرج محمد الساعة ٢ ظهراً ويسير بسرعة $13\frac{1}{3}$ كم/س ويسير ٤٠ كم
[في زمن ٣ ساعات]

وفي الحالة الأولى يصل الساعة ٦ مساءً

وفي الحالة الثانية يصل الساعة ٤ مساءً

بينما في الحالة الثالثة يصل الساعة ٥ مساءً



٦ - يسكن شاب وفتاة بنفس المنزل ويدرسان بنفس الجامعة ، ويقطع
الشاب المسافة من المنزل إلى الجامعة سيراً على الأقدام في ٢٠ دقيقة أما
الفتاة فتسيرها على الأقدام في ٣٠ دقيقة .

فبعد كم دقيقة يلحق الشاب بالفتاة في الطريق ، إذا افترض وخرجت من
منزلها مبكرة عنه بخمس دقائق .

◀ الحل :

يمكن حل هذه المسألة بثلاث طرق مختلفة :

الحل الأول :

يمكن للفتاة التي تقطع المسافة في ٣٠ دقيقة ، أن تقطع في خمس دقائق
مسافة تبلغ $\frac{1}{6}$ المسافة الكلية ($\frac{5}{30}$)

بينما يقطع الشاب في خمس دقائق مسافة تبلغ $\frac{1}{4}$ المسافة الكلية ($\frac{5}{20}$)

وعلى هذا فالفرق بين الشاب والفتاة كل خمسة دقائق

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ من المسافة الكلية}$$

ولما كانت الفتاة تسبق الشاب بخمس دقائق أى بمقدار $\frac{1}{6}$ مسافة الطريق

∴ فالشاب يلحق بالفتاة بعد فترة زمنية $= \frac{1}{6} \div \frac{1}{12} = 2$ فترة زمنية

ولما كانت الفترة الزمنية = ٥ دقائق .

∴ فالشاب يلحق بالفتاة بعد زمن = $2 \times 5 = 10$ دقائق

أى بعد خروجها من منزلها بـ $10 + 5 = 15$ دقيقة
وتكون الفتاة حينئذ في منتصف الطريق للجامعة .

الحل الثاني :

إذا سار جسمان بسرعتين مختلفتين في إتجاه واحد وبينهما فاصل زمنى (أو مسافة) فإن هنالك قاعدة تنص على أن :

$$\text{زمن التلاقى} = \frac{\text{المسافة بين الجسمين عند بدء الحركة}}{\text{مجموع السرعتين}}$$

، $s =$ المسافة الكلية

وسرعة الفتاة = $\frac{s}{30}$ ، سرعة الشاب = $\frac{s}{20}$

$$\therefore \text{زمن التلاقى} = \frac{\frac{s}{6}}{\frac{s}{20} + \frac{s}{30}} = \frac{\frac{10}{5}}{\frac{2s+3s}{60}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ فترة}$$

أى بعد فترتين كل منهما 5 دقائق من تحرك الشاب أى بعد 10 دقائق من تحرك الشاب .

الحل الثالث :

لو خرجت الفتاة مبكرة 10 دقائق فسيلحق الشاب بها عند باب الجامعة ،
فإذا خرجت مبكرة 5 دقائق فقط فإن مما لا شك فيه أنه سيلحق بها في منتصف الطريق أى بعد خروج الشاب بعشر دقائق .



٧ - خرجت سيدة لشراء بعض مستلزمات المنزل من السوق وكان في حافظة نقودها مبلغ يساوى حوالى ٢٣ جنيهاً وهذا المبلغ عبارة عن عملات ورقية فئة الجنيه وفئة الربع جنيه .

وعندما عادت السيدة وُجد معها عدد من الجنيهات الصحيحة بقدر عدد عملات الربع جنيه التى كانت معها قبل خروجها للسوق وُوجد معها

من العملات ذات الربع جنيه بقدر ما كان معها من الجنيهات قبل ذهابها للسوق .

فإذا علم أنه بقي بحافظة نقودها ثلث ما أخذته للسوق عند خروجها فهل يمكنك معرفة ثمن المشتريات .

◀ الحل :

إذا فرضنا أن س = عدد الجنيهات الصحيحة .
وإذا فرضنا بأن ص = عدد العملات ذات الربع جنيه
وعلى ذلك :

فإنه كان معها في البداية مبلغ = (١٠٠ س + ٢٥ ص) قرشاً (١)

وعند العودة تبقى معها مبلغ = (١٠٠ ص + ٢٥ س) قرشاً (٢)

ولما كان المبلغ الثاني = $\frac{1}{3}$ المبلغ الأول

$$\therefore ٣ (١٠٠ ص + ٢٥ س) = (١٠٠ س + ٢٥ ص)$$

$$\therefore ٢٧٥ ص = ٢٥ س$$

$$\therefore س = ١١ ص$$

فلو اعتبرنا أن ص = ١ فإن ما معها من جنيهات = ١١ جنيهاً

ويكون المبلغ الكلي معها = ١١,٢٥ وهذا لا يتفق مع كون المبلغ الذى

كله معها قبل الشراء = حوالى ٢٣ جنيهاً .

وإذا اعتبرنا ص = ٢ فإن عدد الجنيهات = $٢ \times ١١ = ٢٢$ جنيهاً

$$\text{وبالتالى فإن جملة ما كان معها} = ٢٢ + ٢ \times \frac{1}{4} = ٢٢,٥$$

وهو يتفق مع شروط المسألة [حوالى ٢٣ جنيهاً]

[لاحظ أن ص = ٣ فإن المبلغ سيكون ٣٣,٧٥ وهو يختلف كثيراً عما كان

معها كما جاء برأس المسألة (حوالى ٢٣ جنيهاً)]

وبعد الشراء يتبقى :

$$٧٥٠ = ٢٢ \times ٢٥ + ٢ \times ١٠٠ \text{ قرشاً}$$

وهو يعادل ثلث المبلغ الأصلي تماماً = [٢٢,٥٠]

$$\therefore \text{ ثمن الشراء } = ٢٢,٥٠ - ٧,٥٠ = ١٥ \text{ جنيهاً .}$$



٨ - يبلغ إرتفاع قمة إيفرست بجبال الهيمالايا حوالى ٨,٠٠ كم ويراد معرفة الفرق في طول المسار الذى ترسمه قمة الجبل ، وقمة رأس شخص يقف أسفل الجبل بالوادي ، عند دوران الكرة الأرضية دورة واحدة حول محورها (المحور الذى إحدى نهايته هو قمة الجبل) .

الحل :

نعتبر طول نصف قطر الكرة الأرضية = نق [نق ليست ثابتة ولكنها متغيرة

في الواقع]

وأثناء دوران الأرض فإن أى جسم على سطحها يكون مساره دائرة

ويكون طول مسار قمة الجبل = ٢ ط (نق + ٨) كينومتر

بينما أى نقطة على سطح الأرض فإنها ترسم دائرة يبلغ طول محيطها طول

محيط الكرة الأرضية أى = ٢ ط نق

∴ الفرق في طول المسار الذى ترسمه قمة الجبل وقمة رأس شخص يقف

بأسفل الجبل وبإهمال طول هذا الشخص

$$= ٢ ط (نق + ٨) - ٢ ط نق = ٢ ط ٨ = ١٦ ط .$$

$$= ٥٠,٢٦٥ \text{ كيلو متراً .}$$

وواضح أن الجواب لا يتوقف بأى حال على طول نصف قطر الكرة

الأرضية .



٩ - توجه تاجر لشراء بضاعة وكان معه مبلغ حوالى ٥٢٠٠ جنيهاً مكونة

من عملات فئة العشرة جنيهاً والخمسة جنيهاً وعندما عاد وجد أن معه

من الورقة ذات العشرة جنيهاً مبلغ يساوى $(\frac{1}{4})$ ما كان معه من الورقة ذات

الخمس جنيهات ويساوى $(\frac{1}{4})$ ربع ما كان معه من الورقة ذات العشرة جنيهات قبل الشراء .

فإذا علم أن ما بقى من مبلغ $= \frac{5}{16}$ مما كان معه فعلاً قبل الشراء .

فكم يبلغ سعر المشتريات .

◀ الحل :

نفرض أن س = عدد الورقات فئة ١٠ جنيهات .

، نفرض أن ص = عدد الورقات فئة ٥ جنيهات .

وعلى هذا فالتاجر كان معه فى البداية مبلغ من الجنيهات =

(١٠ س + ٥ ص) جنيهاً .

وتبقى معه مبلغ بعد الشراء من الجنيهات =

$(\frac{ص}{4} \times ١٠ + \frac{س}{4} \times ٥)$ جنيهاً .

ولما كان ما بقى معه يعادل $\frac{5}{16}$ من المبلغ الأصلى الذى

كان معه فى البداية .

$$\therefore (\frac{ص}{4} \times ١٠ + \frac{س}{4} \times ٥) = \frac{5}{16} (١٠ س + ٥ ص)$$

$$\therefore \frac{١٠ ص}{4} + \frac{٥ س}{4} = \frac{٢٥ ص}{16} + \frac{٢٥ س}{8}$$

$$\therefore \frac{٤٠ ص - ٢٥ ص}{16} = \frac{٢٥ س - ١٠ س}{8}$$

$$\therefore ١٥ ص = ١٥ س \times 2$$

$$\therefore س = \frac{١}{2} ص$$

والآن لو اعتبرنا ص = ٢٠٠ ورقة

فتكون س = $\frac{200}{2}$ ورقة ويكون المبلغ الذى كان معه

قبل الشراء = $\frac{2000}{2} \times 10 + 200 \times 5 = 2000$ جنيهاً .

وهو يقل كثيراً عما كان معه (حوالي 5200 جنيهاً)

ولو اعتبرنا ص = 600 فإن س = 300

ويكون ما معه قبل الشراء = $300 \times 10 + 600 \times 5 = 6000$

وهو يزيد أيضاً عن المبلغ الذى كان معه .

فإذا اعتبرنا ص = 520 ورقة تكون س = 260 ورقة

ويكون المبلغ الذى كان معه = $260 \times 10 + 520 \times 5$

$$= 2600 + 2600 = 5200$$

وهو يتفق مع شروط المسألة تماماً .

وبعد الشراء يتبقى $\frac{520}{4}$ ورقة ذات العشرة جنيهاً أى 130 ورقة

فئة العشرة بالإضافة إلى عدد ورقات من فئة الخمسة جنيهاً = $\frac{260}{4}$

$$= 65 \text{ ورقة}$$

∴ الباقي معه = $130 \times 10 + 65 \times 5$

$$= 1300 + 325 = 1625 \text{ جنيهاً .}$$

وهو يعادل : $\frac{1625}{5200} = \frac{5}{16}$ من المبلغ الأصلي الذى كان معه



١٠ - سيارتا نقل محملتان بضاعة من نفس النوع ، لو أخذنا ١ طن من السيارة الأولى للثانية لتساوت الحمولتان ، ولو أخذنا ١ طن من السيارة الثانية ووضعناه على حمولة الأولى لأصبحت حمولة الأولى ضعف حمولة الثانية ، فكم تبلغ حمولة كل سيارة منهما .

◀ الحل :

لو فرضنا حمولة السيارة الأولى = س

، لو فرضنا حمولة السيارة الثانية = ص

فعند إضافة ١ طن على حمولة السيارة الثانية تُصبح حمولتها ص + ١ وفي نفس الوقت تنقص حمولة السيارة الأولى بمقدار ١ طن وتصبح س - ١ وحينئذ تتساوى الحمولتان :

$$\therefore \text{ص} + ١ = \text{س} - ١ \quad (١) \dots\dots$$

وبإضافة ١ طن لحمولة السيارة الأولى تصبح حمولتها س + ١ بينما تنقص حمولة السيارة الثانية بمقدار ١ طن وتصبح ص - ١ وحينئذ تكون حمولة الأولى ضعف حمولة الثانية :

$$\therefore \text{س} + ١ = ٢ (\text{ص} - ١) \quad (٢) \dots\dots$$

من (١) :

$$\therefore ٢ \text{ ص} + ٢ = ٢ \text{ س} - ٢ \quad (٣) \dots\dots$$

، من (٢) :

$$\therefore ٢ \text{ ص} - ٢ = \text{س} + ١ \quad (٤) \dots\dots$$

ب طرح (٤) من (٣) :

$$\therefore ٤ = \text{س} - ٣$$

ومنها س = ٧ طن وهي حمولة السيارة الأولى .

\therefore ص = ٥ طن وهي حمولة السيارة الثانية



١١- إثنان لدى كل منهما حافظة نقود بها مبلغ غير معروف من الجنيهات أنه إذا أعطى الأول « ٧ » جنيهات للثاني لأصبح ما مع الثاني ضعف ما مع الأول ، بينما لو أعطى الثاني « ٧ » جنيهات للأول لتساوت المبالغ مع كل منهما ، فكم كان مقدار المبالغ بالحافظتين .

◀ **الحل :**

إذا فرضنا أن ما مع الأول من جنيهات = س جنيهاً .

، إذا فرضنا أن ما مع الثاني من جنيهات = ص

ومن رأس المسألة يمكننا تكوين معادلتين جبريتين بسيطتين حيث :

عندما يعطى الأول للثاني ٧ جنيهات يُصبح ما معه (س - ٧) جنيهاً

ويصير ما مع الثاني ص + ٧ جنيهات

وهنا يكون ما مع الثاني ضعف ما مع الأول .

(١)

$$\therefore \text{ص} + ٧ = ٢ (س - ٧)$$

(٢)

$$\text{ولكن ص} - ٧ = س + ٧$$

\therefore من المعادلة الثانية :

(٣)

$$\text{ص} = س + ١٤$$

وبالتعويض عن ص = (س + ١٤) من (٣) في المعادلة (١) :

$$\therefore س + ١٤ + ٧ = ٢ (س - ١٤)$$

$$\therefore س = ٣٥ ،$$

وبالتعويض عن س = ٣٥ في المعادلة (٣) :

$$\therefore \text{ص} = ٣٥ + ١٤ = ٤٩$$

\therefore الأول معه ٣٥ جنيهاً .

والثاني معه ٤٩ جنيهاً .

(يتساويان)

$$\text{وواضح أن : } ٤٩ - ٧ = ٣٥ + ٧$$

(الضعف)

$$٤٩ + ٧ = ٢ (٣٥ - ٧)$$



١٢ - أربعة أشخاص مجموع ما معهم = ٤٠,٥ جنيهاً ، فلو زدنا على ما مع

الأول جنيهين وأنقصنا من الثاني جنيهين وضاعفنا ما مع الثالث وأخذنا من

الرابع نصف ما معه . لأصبح مع كل منهم نفس المبلغ .

فكم كان مع كل منهم .

◀ الحل :

نفرض أن المبالغ معهم هي س ، ص ، ع ، م على الترتيب .

$$\therefore \text{س} + \text{ص} + \text{ع} + \text{م} = ٤٠,٥ \quad (١) \dots\dots\dots$$

ويصبح :

$$\text{الأول بعد زيادته جنيهاً} = \text{س} + ٢$$

$$\text{، الثاني بعد إنقاصه جنيهاً} = \text{ص} - ٢$$

$$\text{، الثالث بعد مضاعفة ما معه} = ٢ \text{ ع}$$

$$\text{، الرابع بعد مناصفة ما معه} = \frac{\text{م}}{٢}$$

وحيث أن تتساوى المبالغ معهم جميعاً أى :

$$\text{س} + ٢ = \text{ص} - ٢ = ٢ \text{ ع} = \frac{\text{م}}{٢}$$

ولحل هذه المعادلات نقول :

$$\text{س} + ٢ = \text{ص} - ٢ \quad \text{ومنها} \text{ص} = \text{س} + ٤ \quad (٢) \dots\dots$$

$$\text{، س} + ٢ = ٢ \text{ ع} \quad \text{ومنها} \text{ع} = \frac{١}{٢} (\text{س} + ٤) \quad (٣) \dots\dots$$

$$\text{، س} + ٢ = \frac{\text{م}}{٢} \quad \text{ومنها} \text{م} = ٢ (\text{س} + ٤) \quad (٤) \dots\dots$$

وبالتعويض عن قيم ص ، ع ، م من (٢) ، (٣) ، (٤) في المعادلة (١) :

$$\therefore \text{س} + (\text{س} + ٤) + \frac{١}{٢} (\text{س} + ٤) + ٢ (\text{س} + ٤) = ٤٠,٥$$

$$\therefore ٤,٥ \text{ س} + ٩ = ٤٠,٥$$

$$\therefore ٩ \text{ س} = ١٨ - ٨١ = ٦٣$$

$$\therefore \text{س} = ٧ \text{ ومنها}$$

$$\therefore \text{ص} = ٧ + ٤ = ١١ \quad (٢) \dots\dots\dots$$

$$\text{، ع} = \frac{٧ + ٤}{٢} = ٤,٥ \quad (٣) \dots\dots\dots$$

$$\text{، م} = ٢ \times ٧ + ٤ = ١٨ \quad (٤) \dots\dots\dots$$

وعلى هذا فالمبالغ كان توزيعها كالتالى :

١٨	٤,٥	١١	٧
وقسمة $\div 2$	وضرب $\times 2$	وطرح $- 2$	بجمع $+ 2$
٩	٩	٩	٩

وهى متساوية



١٣- ثلاثة أفراد مجموع ما معهم = ٤٢ جنيهاً ، ولو أنقصنا مما مع الأول ثلاثة جنيهات وضاعفنا ما مع الثانى ثلاث مرات وأبقينا للثالث ثلث ما معه لأصبح كل منهم معه نفس المبلغ .
والمطلوب معرفة ما مع كل منهم .

◀ الحل :

نفرض أن ما مع الأول = س
، نفرض أن ما مع الثانى = ص
، نفرض أن ما مع الثالث = ع

(١)

$$\therefore س + ص + ع = ٤٢$$

ويصبح ما مع الأول س - ٣ بإنقاص ثلاثة جنيهات
ويصبح ما مع الثانى ٣ ص بمضاعفته ثلاث مرات

ويصبح ما مع الثالث $\frac{ع}{٣}$ بإنقاصه للثالث

وحيثذ يصبح كل منهم معه نفس المقدار :

$$\therefore س - ٣ = ٣ = \frac{ع}{٣} ص$$

$$(٢) \dots\dots \frac{(س - ٣)}{٣} = ص \therefore س - ٣ = ٣ ص$$

$$(٣) \dots\dots \frac{ع}{٣} = ٣ - س \therefore ع = ٣ - س ٩$$

وبالتعويض عن قيم ص ، ع من (٢) ، (٣) في المعادلة (١) :

$$\therefore \text{س} + \left(\frac{\text{س} - 3}{3} \right) + (3 - \text{س} - 9) = 42$$

$$\therefore 3\text{س} + \text{س} - 3 + 9 - \text{س} - 9 = 126$$

$$\therefore 13\text{س} = 106$$

ومنها س = ١٢ جنيهاً

من معادلة (٢)

$$\therefore \text{ص} = \left(\frac{3 - 12}{3} \right) = 3 \text{ جنيهاً}$$

من معادلة (٣)

$$\text{ع} = 9 - 12 \times 3 = 27 \text{ جنيهاً}$$

المبالغ كالآتي :

٢٧	٣	١٢
وبالقسمة $\div 3$	وبالضرب $\times 3$	ب طرح - ٣
٩	٩	٩

وهي مبالغ متساوية .



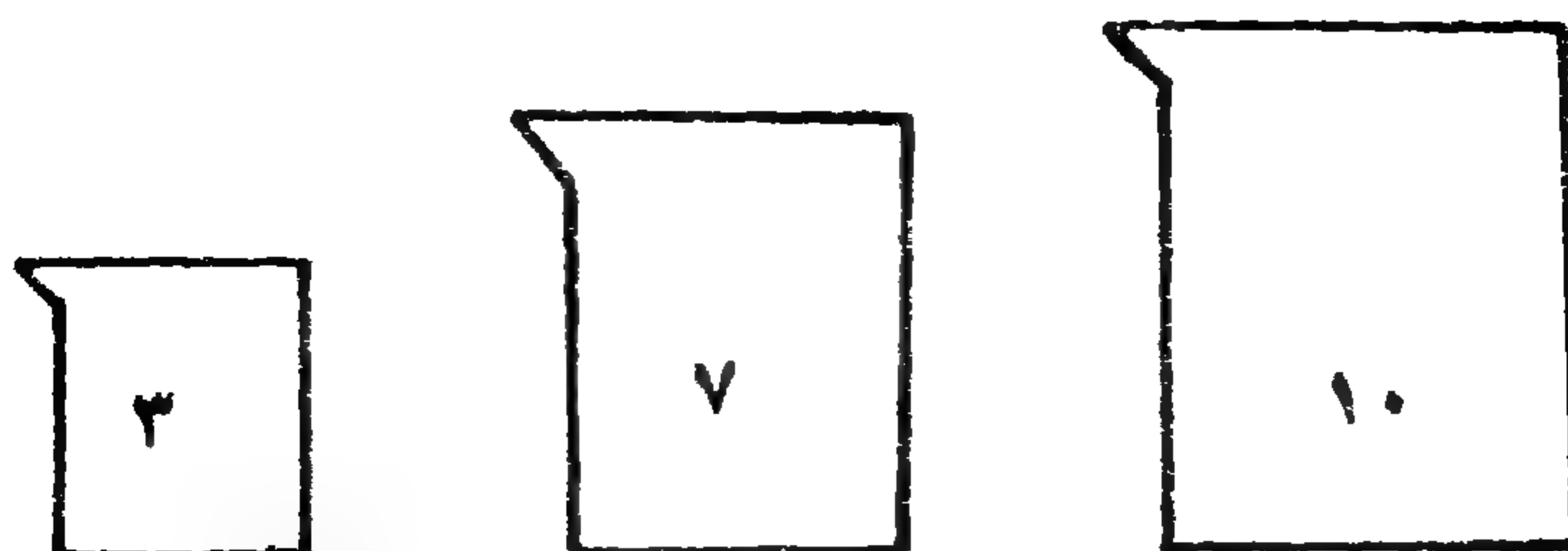
١٤- ثلاثة أوعية : هاتما ١٠ لتر ، ٧ لتر ، ٣ لتر .
والكبير منها مملوء تماماً بسائل والباقيان فارغان ، يراد باستعمال الثلاث
أوعية تقسيم هذا السائل إلى نصفين تماماً النصف الأول بالوعاء الكبير
والنصف الآخر بالوعاء الأوسط .

◀ الحل :

مثل هذا النوع من المسائل لا يحتاج إلى أية قوانين أو معادلات للحل ، كل
ما هنالك بعض من المهارات والمحاولات التي تؤدي بلا شك إلى النتيجة
المرجوة .

سنبدأ في هذه المسألة بنقل السائل من الوعاء الأكبر إلى الأوعية الأخرى
وبتسلسل يؤدي في النهاية إلى تنصيف الكمية وسوف نكتب تحت الثلاث

أوعية بالشكل أرقاماً توضح ما تم نقله وما تم إضافته إلى وعاء وعلى خطوات .



	—	—	١٠
١	—	٧	٣
٢	٣	٤	٣
٣	—	٤	٦
٤	٣	١	٦
٥	—	١	٩
٦	١	—	٩
٧	١	٧	٢
٨	٣	٥	٢
٩	—	٥	٥

وتنتهى العملية بعد تسع عمليات إلى أن يصبح بالوعاء الأكبر ٥ لتر والأصغر فارغ ، بينما الأوسط به ٥ لتر كذلك .



١٥ - ثلاث أوعية تستخدم كمكيال للسوائل ساعتها ٦ ، ٣ ، ٢ لترأ على الترتيب ، فإذا كان الكبير مملوءاً بسائل ويراد تقسيمه إلى جزئين كل منهما ٣ لترات ، فكيف السيل .

◀ الحل :

يتم حل هذه المسألة كما هو مبين بالجدول المرفق وتنتهى عملية القسمة بعد إجراء عمليات الملء والتفريغ المتعاقبة بالأوعية المختلفة فى الخطوة السابعة .

	سعة الوعاء الأول ملء وبه ٦ لتر	سعة الوعاء الثانى فارغ	سعة الوعاء الثالث فارغ
١	٢,٥	٣,٥	—
٢	٢,٥	١,٥	٢
٣	٤,٥	١,٥	—
٤	٤,٥	—	١,٥
٥	١	٣,٥	١,٥
٦	١	٣	٢
٧	٣	٣	—

يتم حل المسألة كما هو مبين بالجدول المرفق وتنتهى عملية القسمة بعد إجراء عمليات الملء والتفريغ المتعاقبة بالأوعية المختلفة فى الخطوة السابعة .



١٦- على خط مترو الأنفاق من ميدان رمسيس وحتى حلوان حوالى ٢٠ محطة مختلفة ، فهل يمكنك معرفة عدد الأشكال المختلفة [فى سعرها] من التذاكر (والمفروض) إعدادها من هيئة مترو الأنفاق لكل شبائك أو منافذ بيع هذه التذاكر .

◀ الحل :

يوجد فى كل محطة من المحطات العشرين منفذ بيع تذاكر يمكنك أن تطلب منه تذكرة لأى من المحطات التسعة عشر الباقية .
وعلى هذا فإنه يلزم طبع عدد من أنواع التذاكر :

$$= 20 \times 19 = 380 \text{ تذكرة مختلفة}$$

أما إذا كان هنالك نظام تذاكر ذهاب وعودة ، فإنه يلزم حينئذ مضاعفة هذا الرقم ويصبح عددها

$$= 380 \times 2 = 760 \text{ شكلاً مختلفاً .}$$

ملاحظة : [تقوم هيئة مترو الأنفاق بإصدار تذاكر موحدة الفئة] .



١٧- سئل رجل عن عمره فأجاب بطريقة جعلتها فزورة .

كان عمري منذ ١٥ سنة ضعف عُمر ابني بعد خمس سنوات وأنا الآن أكبر منه بثلاث مرات ، فكم عُمر كُل منهما .

◀ الحل :

إذا فرضنا أن عمر الابن الآن = س عاماً
فيكون عمره بعد خمس سنوات = س + ٥ عاماً
وعمر الأب الآن = ٣ س

وعمر الأب منذ ١٥ سنة = ٣ س - ١٥
وبناء على ما تقدم يمكن تكوين المعادلة الآتية :

$$٣ س - ١٥ = ٢ (س + ٥)$$

$$\therefore س = ٢٥ \text{ عاماً}$$

فيكون عمر الأب = ٣ × ٢٥ = ٧٥ عاماً

وعمر الأب منذ ١٥ سنة = ٧٥ - ١٥ = ٦٠ عاماً

عمر الابن بعد خمس سنوات = ٢٥ + ٥ = ٣٠ عاماً

ومن هذا يتضح أن الابن بعد خمس سنوات يكون عمره ثلاثون عاماً وهو نصف عمر أبيه منذ ١٥ سنة .



١٨- كيف يمكنك تحديد عمري الآن ، إذا علمت ما هو آت .
 قضيت $\frac{1}{5}$ عمري الآن في فترة الطفولة وبعدها بخمس سنوات حصلت
 على شهادة الإعدادية وبعدها بفترة تبلغ $\frac{1}{4}$ عمري الآن تخرجت مهندساً من
 الجامعة ثم عملت مباشرة لمدة سبع سنوات ثم سافرت للخارج لمدة تبلغ $\frac{1}{8}$
 عمري ثم عدت من الخارج وتزوجت مباشرة فأنجبت طفلي الأول بعد عام
 من زواجنا وكان هذا منذ أربع سنوات ،

◀ **الحل :**

إذا فرضنا أن العمر الآن هو س فيكون :

$$\text{فترة الطفولة} = \frac{1}{5} \times \text{س} = \frac{\text{س}}{5} \text{ سنة}$$

الحصول على شهادة الإعدادية بعد خمس سنوات = + ٥ سنة

من تاريخ الحصول على الإعدادية وحتى التخرج = $\frac{\text{س}}{4}$ سنة

فترة العمل = ٧ سنين

فترة السفر للخارج = $\frac{\text{س}}{8}$ سنة

إنجاب أول طفل بعد = ١ سنة

منذ ٤ سنوات = + ٤ سنوات

ويمكننا الآن بسهولة أن نُكوّن المعادلة البسيطة التالية :

$$\text{س} = \frac{\text{س}}{5} + ٥ + \frac{\text{س}}{4} + ٧ + \frac{\text{س}}{8} + ١ + ٤$$

$$= ١٧ + \frac{٨ \text{ س} + ١٠ \text{ س} + ٥ \text{ س}}{٤٠} + ١٧ = \frac{٢٣ \text{ س}}{٤٠}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٢٣ \text{ س}}{٤٠} - ١٧$$

$$\therefore ١٧ = \frac{٤٠ \text{ س} - ٢٣ \text{ س}}{٤٠}$$

$$١٧ \cdot ٤٠ = ٤٠ \times ١٧$$

$$\cdot \cdot \cdot \text{س} = ٤٠ \text{ عاماً}$$

وهو عمرى الآن .

$$\text{فترة الطفولة} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

وبعدها بخمس سنوات الحصول على الإعدادية أى عند (١٣) عاماً

وبعدها بـ $(\frac{٤٠}{٤})$ أى عشر سنوات تخرج مهندساً (٢٣ عاماً)

ثم سبع سنوات عمل (٣٠) ثم $(\frac{٤٠}{٨} = ٥)$

أى عند (٣٥) عاماً عدت من الخارج وأنجبت أول طفل (٣٦) عاماً
ثم $٤٠ = ٤ + ٤٠$



١٩- سارت سيارة من القاهرة متجهة إلى سوهاج بسرعة ٨٠ كم/ساعة
فوصلت الساعة الواحدة ظهراً ، وتحركت معها فى نفس الوقت سيارة
أخرى من نفس الموضع متجهة إلى سوهاج كذلك وبسرعة ١٢٠ كم/ساعة
فوصلت الساعة الحادية عشرة صباحاً (قبل الظهر)

فهل يمكنك حساب السرعة التى تسير بها سيارة مثيلة من نفس المكان
لتصل إلى المكان المحدد بسوهاج وبحيث تصل فى تمام الساعة ١٢ ظهراً .

◀ الحل :

سرعة الإجابة قد تدفعك إلى القول بأن السرعة المطلوبة هى المتوسط
الحسابى للسرعتين ٨٠ ، ١٢٠ أى بسرعة ١٠٠ كم/ساعة .

إلا أن واقع الأمر يختلف ولمعرفة هذا نقول :

نفترض أن السيارة التى تسير بسرعة ١٢٠ كم/ساعة قد سارت لمدة
ساعتين زائدتين (فرضاً) وبنفس السرعة (١٢٠ كم/س) ، فإنها سوف تقطع

مسافة تزيد ب $2 \times 120 = 240$ كم عن المسافة الفعلية التي قطعها ،

وحيث أن فارق السرعة في المسافة بينها وبين السيارة الأولى :

$$= 120 - 80 = 40 \text{ كم/ساعة} .$$

∴ فهو يمكث بالطريق زمناً قدره $= 240 \div 40 = 6$ ساعات

ومن هنا يمكننا معرفة أن الزمن الفعلي الذي إستغرقه في الطريق

$$= 6 \text{ ساعات} - 2 \text{ ساعة} = 4 \text{ ساعات}$$

$$\text{وتقطع خلالها السيارة مسافة} = 4 \times 120 = 480 \text{ كم}$$

وهي المسافة الفعلية بين القاهرة وسوهاج .

والمطلوب هو حساب سرعة سيارة تقطع مسافة 480 كيلو متراً في زمن

قدره بين (6 ، 4) ساعات أى في خمس ساعات

$$\text{والسرعة المطلوبة} = \frac{480}{5} = 96 \text{ كيلو متراً/ساعة}$$

السيارة الأولى	السيارة الثانية	السيارة الثالثة	
480	480	480	المسافة
80	120	96	السرعة
6	4	5	الزمن / ساعة
الواحدة ظهراً	الحادية عشرة صباحاً	الثانية عشر ظهراً	ساعة الوصول



٢٠- إذا اعتبرنا أن إرتفاع بُرج الجزيرة حوالى 180 متراً وباعتبار أن وزنه

يُعادل بالتقريب فرضاً 10000 طن ،

وقد تم عمل نموذج مشابه لهذا البرج في أحد المعارض بالخارج ، فكان

إرتفاعه = 180 سم فهل يمكنك معرفة وزن هذا النموذج .

◀ الحل :

حيث أن حجم الأشكال المتشابهة تكون متناسبة كمكعب الارتفاعات ولما كانت نسبة الارتفاعات $\frac{1}{100} = \frac{1.8 \text{ م}}{180 \text{ م}}$

∴ نسبة الحجمين أى حجم النموذج : حجم البرج الأصلي تكون كنسبة :

$$\frac{1}{610} = \left(\frac{1}{100}\right)^3$$

أى كنسبة واحد إلى مليون .

ولما كان النموذج مصنوعاً من نفس خامات ومواد البرج (نفس الكثافة) لذا فإن النموذج لابد وأن يكون أخف من البرج الأصلي بنفس النسبة أى أن وزن النموذج

$$= \frac{1}{610} \text{ من وزن البرج الأصلي}$$

$$= \frac{1}{610} \times 10000 \times 10000 \times 10 = 10 \text{ كجم}$$



٢١- تقوم إحدى الشركات الهندسية بإنتاج سلعة ما ذات شكل متوازي سطوح وقد تم عمل نموذج مصغر (ماكيت) لهذه السلعة أبعاده أصغر من السلعة الأصلية بمقدار العشر فكان وزنه = ٤٠ جم ، فكم يكون وزن السلعة الأصلية .

◀ الحل :

إذا تصورت أن الإجابة هي عشرة أضعاف الـ (٤٠) جم فهذا خطأ فادح وذلك لأن العينة أو الماكيت أصغر من الأصل في الطول والعرض والارتفاع بمقدار العشر .

لذلك فإن حجم السلعة الأصلية أكبر من الماكيت بمقدار

$$10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ مرة حجماً .}$$

ولما كانت المادة المستخدمة في صنعها واحدة .

$$\therefore \text{ فوزن العينة الأصلية } = 40 \times 1000 = 40 \text{ كجم}$$



٢٢- جسم هندسي مفرغ وكروي الشكل يبلغ وزنه ٢٠٠ كجم ، يراد عمل نموذج له من نفس المادة المصنوع منها الجسم الأصلي وبحيث تكون أبعاد العينة بمقدار خمس ($\frac{1}{5}$) الأبعاد الأصلية ، فكم يبلغ وزن الكرة العينة .

◀ الحل :

ليس كما قد يتبادر إلى ذهنك لأول وهلة أن وزن النموذج يعادل

$$200 \times \frac{1}{5} = 40 \text{ كجم} .$$

ففي الواقع ، تكون مساحة سطح النموذج أصغر بمقدار $\frac{1}{25}$

مرة عن الأصل وليس العشر ، ولما كانت سطوح الأجسام المتشابهة تتناسب مع مربعات أبعادها ، باعتبار سمك الجدار واحد ويتم صنعها من نفس الخامة .

$$. . . \text{ ، مساحة سطح الكرة } = 4 \pi \text{ نق}^2$$

$$. . . \text{ مساحة سطح الكرة الأصلية } = 4 \pi \text{ نق}^2 \quad (١) \dots\dots\dots$$

$$. . . \text{ مساحة سطح الكرة العينة } = 4 \pi \left(\frac{\text{نق}}{5}\right)^2 \quad (٢) \dots\dots\dots$$

وبقسم (٢) على (١) :

$$. . . \text{ مساحة سطح الكرة العينة } = \frac{1}{25} \text{ من مساحة سطح الكرة الأصلية} .$$

ولما كانا مصنوعتين من نفس المادة وبنفس سمك الجدار (حتى لا يتغير

نصف القطر)

$$. . . \text{ فوزن النموذج } = 200 \times \frac{1}{25} = 8 \text{ كجم}$$

٢٣- كأسان زجاجيان متشابهان يسع الأول ما مقداره سبعة وعشرين ضعف ما يسعه الكأس الصغير .

فيكم مرة يبلغ وزن الكأس الأكبر نسبة إلى الكأس الأصغر (وهو فارغ)

◀ الحل :

حيث أن الكأسين متشابهين هندسياً ، ولما كان الكأس الأكبر أكبر في السعة من الكأس الأصغر بمقدار (٢٧) مرة ، لذا فإن المقاييس البعدية للأكبر تكون أكبر بمقدار ثلاث مرات $[٢٧ = ٣ \times ٣ \times ٣]$

وحيث أنه أعلى وأوسع من الصغير بمقدار ثلاث مرات .

لذلك فإن مساحة سطحه تكون أكبر بمقدار $٩ = ٣ \times ٣$ مرات

، . . . سطوح الأجسام المتشابهة تتناسب مع مربعات أبعادها الخطية

، . . . سمك مادة الجدار واحدة والخامة المستعملة واحدة .

لذلك فإن الوزن هنا يتوقف على مساحة السطح .

وعلى هذا فالكأس الأكبر يكون أثقل من الأصغر بمقدار ٩ مرات (وهو

فارغ) .



٢٤- دورقان لهما نفس الشكل ومملوءان بنفس السائل ومصنوعان من

نفس المادة وسمكهما رقيق .

أحدهما يزن مملوءاً ٤ كجم وإرتفاعه ٢٥ سم بينما يزن الآخر مملوءاً ٢

كجم وإرتفاعه = ١٩,٧٠ سم

المطلوب منك حساب وزن السائل الموجود بكل من الدورقان .

◀ الحل :

نفرض أن وزن السائل بالدورق الأكبر = س كجم

، نفرض أن وزن السائل بالدورق الأصغر = ص كجم .

، نفرض أن وزن الدورق الفارغ الأكبر = ع كجم
، نفرض أن وزن الدورق الفارغ الأصغر = ل كجم

(١) $\therefore \text{س} + \text{ع} = ٤ \text{ كجم}$

(٢) $\text{ص} + \text{ل} = ٢ \text{ كجم}$

ومن معطيات المسألة ، حيث أنهما مصنوعان من نفس المادة وبسبك رقيق ، فإن حجم السائل في الدورقين يتناسب مع حجميهما أى (تقريباً) مع مكعب إرتفاعيهما .

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} \approx \frac{{}^2(٢٥)}{{}^3(١٩,٧)} = \frac{١٥٦٢٥}{٧٦٤٥,٤} \approx ٢,٠٤$$

(٣) $\therefore \text{س} \approx ٢,٠٤ \text{ ص}$

ويتناسب وزن الدورق الفارغ مع مساحة سطحه الكلية أى مع مربع الإرتفاع .

$$\therefore \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \frac{٢٢٥}{{}^2(١٩,٧)} = ١,٦١$$

(٤) $\therefore \text{ع} = ١,٦١ \text{ ل}$

وبالتعويض من (٣) ، (٤) في (١) ، (٢) :

(٥) $\therefore ٢,٠٤ \text{ ص} + ١,٦١ \text{ ل} = ٤$

(٦) $\text{ص} + \text{ل} = ٢$

وبضرب المعادلة (٦) في ١,٦١ لكلا الطرفين :

(٧) $١,٦١ \text{ ص} + ١,٦١ \text{ ل} = ٣,٢٢$

وبطرح المعادلة (٧) من المعادلة (٥) :

$$\therefore ٠,٤٣ \text{ ص} = ٠,٧٨$$

$$\therefore \text{ص} = ١,٨١ \text{ كجم}$$

بالتعويض في (٢) ، (٤) :

$$\therefore \text{ل} = ١,٨١ - ٢ = ٠,١٩ \text{ كجم}$$

$$ع = ١,٦١ \times ٠,١٩ \approx ٠,٣١ \text{ كجم}$$

وبالتعويض في (١) :

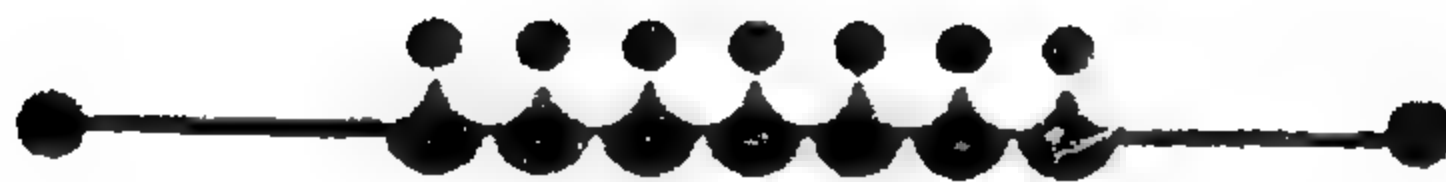
$$\therefore س = ٤ - ٠,٣١ = ٣,٦٩ \text{ كجم}.$$

\therefore فالدورق الأول وزنه فارغاً

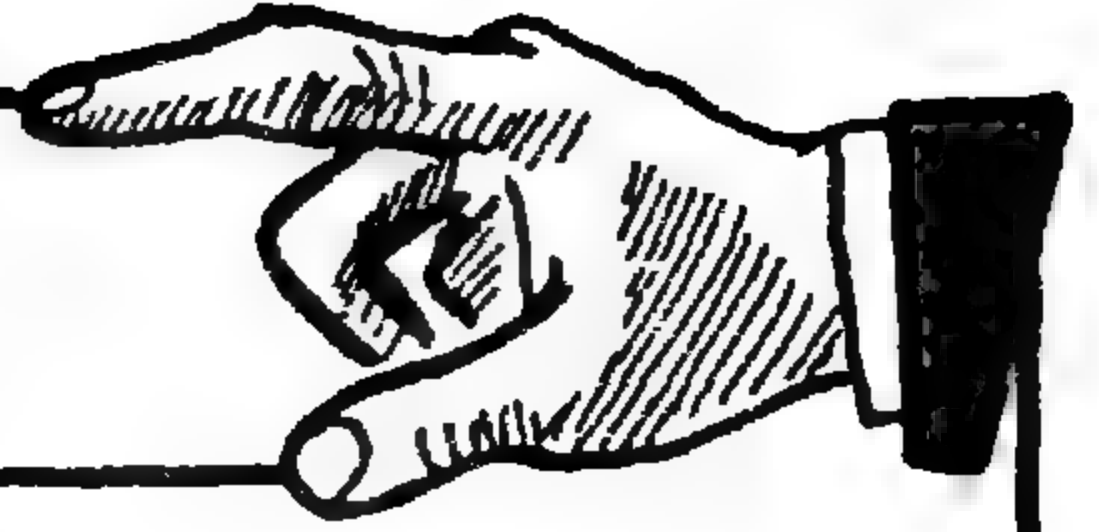
$$= ٠,٣١ \text{ كجم ووزن السائل به } ٣,٦٩ \text{ كجم}.$$

، الدورق الأصغر وزنه فارغاً

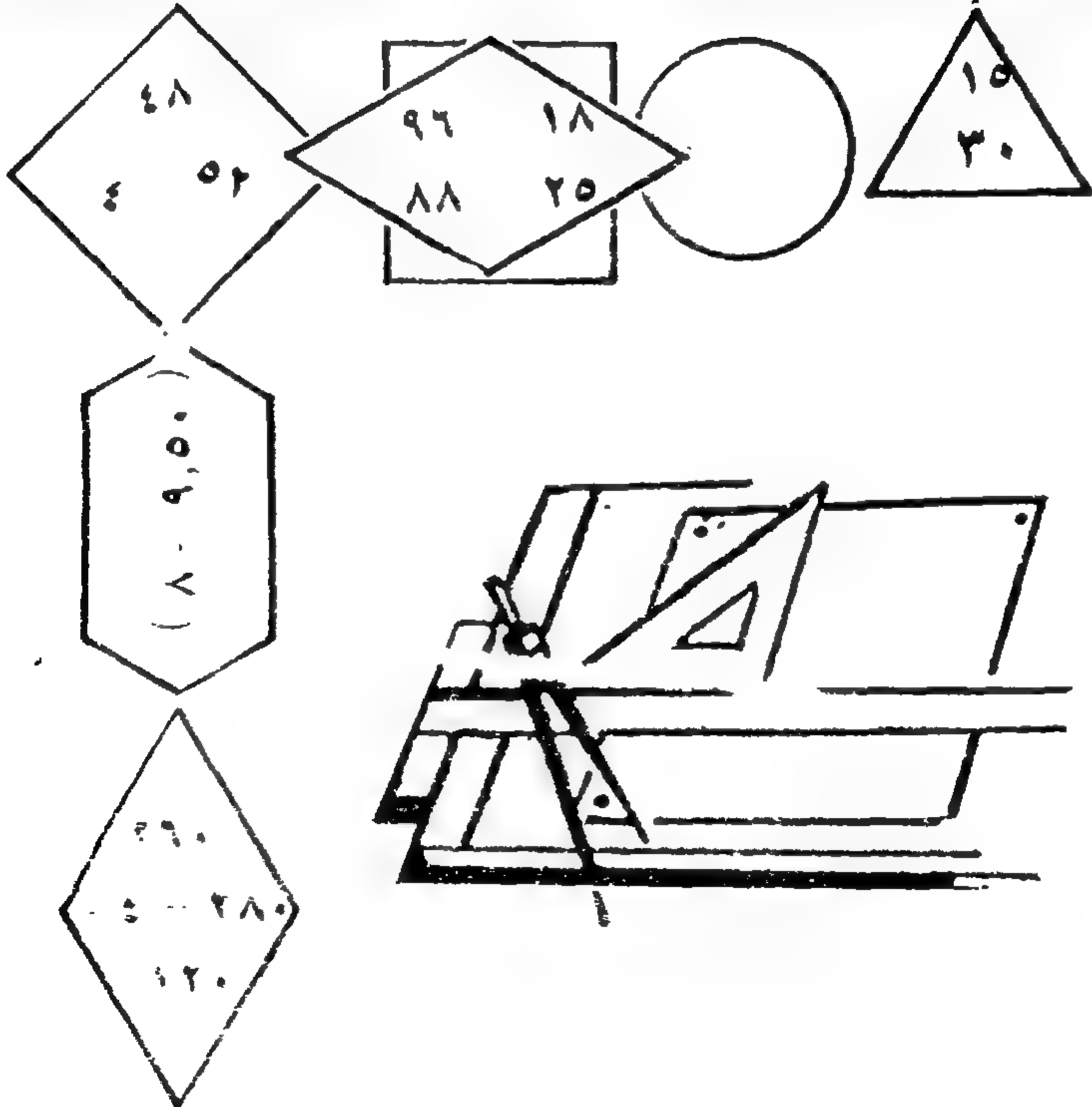
$$= ٠,١٩ \text{ كجم ووزن السائل به } ١,٨١ \text{ كجم}.$$



الباب السادس



الفائدة العملية من مسائل المتواليات



١ - أوجد مجموع جميع الحدود الموجبة من المتوالية العددية :

$$٢٧ ، ٢٤,٥ ، ٢٢ ،$$

◀ الحل :

لحل هذه المسألة يجب معرفة أول حد سالب ، ولنفترض أن هذا الحد هو

الحد التوفى :

$$٠ \therefore ح_n = 1 + (n - 1) د$$

حيث ح_n هو أول حد سالب ، $1 =$ الحد الأول من المتوالية .

، $د =$ أساس المتوالية ، $ن =$ رتبة أول حد سالب

$$٠ \therefore ٢٧ = 1 ، ٢٧ - ٢٤,٥ = د ، ٢٧ - ٢ = ٢٩,٥$$

$$٠ \therefore ح_n = ٢٧ + (n - 1) \times (-٢,٥)$$

$$= ٢٩,٥ - ٢,٥ ن = \frac{٥٩}{٢} - \frac{٥ ن}{٢}$$

، ح_n يكون أكبر من الصفر عندما $\frac{٥٩}{٢} - \frac{٥ ن}{٢} > ٠$ صفر

$$\text{أى عندما } \frac{٥٩}{٢} < \frac{٥ ن}{٢}$$

$$\text{أ، عندما } ن > \frac{٢ \times ٥٩}{٥ \times ٢} \text{ أى } ن > ١١,٨$$

٠. فأول حد سالب هو الحد الثانى عشر وقيمته $(-٠,٥)$.

ولما كانت ن عدد صحيح دائماً

٠. الحدود الموجبة فى هذه المتوالية $= ١١$ حداً فقط

ولإيجاد مجموع الحدود الموجبة نقول :

$$ج = \frac{ن}{٢} [٢ + (١ - ن) د] ، \text{ حيث } ج = \text{المجموع}$$

$$٠. ج = \frac{١١}{٢} [٢ + (١ - ١١) \times (-٢,٥)]$$

$$= ١٥٩,٥ = ٢٩ \times ٥,٥ = [٢٥ - ٥٤] ٥,٥ =$$

٢ - أوجد رتبة أول حد سالب في المتوالية :

٥٩ ، ٥٥ ، ٥١ ، وما قيمته

◀ الحل :

هنا الحد الأول $a_1 = 59$

، الأساس $d = 59 - 55 = 51 - 55 = -4$

∴ $a_n = 1 + (n-1)d = 59 - 4(n-1)$

$$= 59 - 4n + 4 = 63 - 4n$$

وأول حد سالب يكون عندما $63 - 4n > 0$ صفر

أى إذا كان $4n < 63$ أى عندما $n < \frac{63}{4}$

أى عندما $n < 15.75$

∴ أول حد سالب هو عندما $n = 16$ ، أى الحد السادس عشر ،

$$a_{16} = 59 - 4(16-1) = 59 - 60 = -1$$

$$= -1$$



٣ - يتناقص إنتاج منجم للذهب سنوياً بحيث يكون الإنتاج في سنة ما أقل ١٥٪ من السنة التى تسبقها فإذا كان إنتاج المنجم فى السنة الأولى = ٢٠٠٠ كجم من الذهب .

والمطلوب معرفة مجموع ما ينتجه المنجم فى العشرة سنين الأولى وما هو أقصى إنتاج يمكن الحصول عليه من هذا المنجم .

◀ الحل :

لما كانت الكمية التى ينتجها المنجم تقل سنوياً بمعدل ثابت (١٥٪) فإن الكميات التى ينتجها هذا المنجم تمثل متوالية هندسية تناقصية .

وعلى هذا فمجموع الكميات المنتجة فى عشر سنوات :

[واضح أن الإنتاج فى أى سنة = ٨٥٪ من إنتاج السنة التى تسبقها

$$= 100\% - 15\%] .$$

$$ج = 2000 + 2000(0,85) + 2000(0,85)^2 + \dots \text{حتى عشرة حدود}$$

$$\therefore ج = \frac{[1 - (0,85)^{10}]}{1 - 0,85} \text{ حيث ج = المجموع ، الحد الأول (2000)}$$

ر = أساس المتوالية

$$0,85 = \frac{2000(0,85)}{2000} = \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}} =$$

$$\therefore ج = \frac{[1 - (0,85)^{10}]}{0,85 - 1} \times 2000 =$$

$$\therefore ج = \frac{2000}{[1 - 0,85^{10}]} =$$

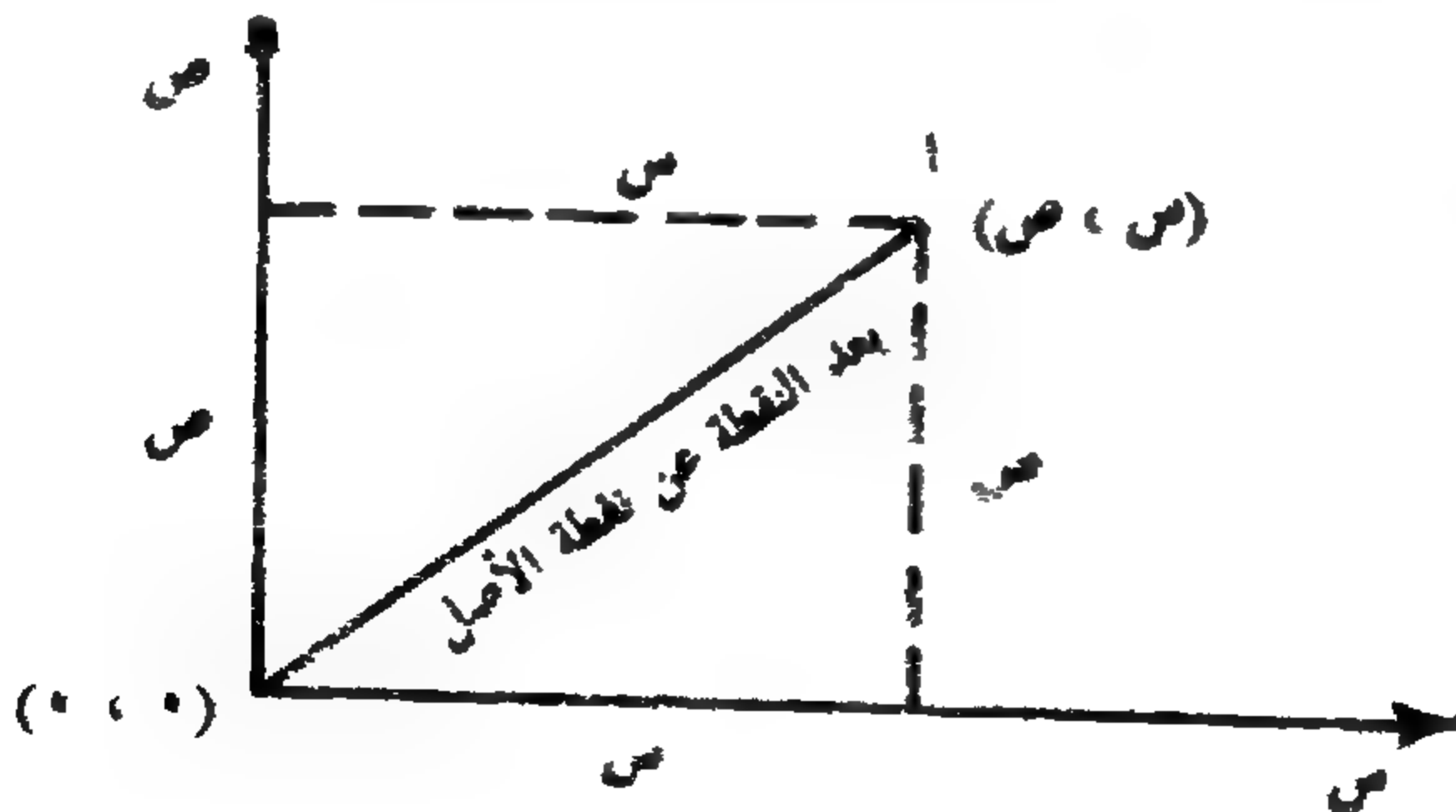
$$= 10706,667 = 100 \times \frac{803}{1000} \times \frac{2000}{10} =$$

أى ما يزيد عن 10 طن ذهب .



٤ - كيف تثبت أن أبعاد النقط التى إحداثياتها (١ : ٢) ، (٣ : ٤) ، (٥ : ١٠) ، عن نقطة الأصل (صفر ، صفر) تكون الثلاثة حدود الأولى من متوالية عددية .

الحل :



من المعلوم أن بعد أى نقطة إحداثياتها (س ، ص) عن نقطة الأصل هو $\sqrt{س^2 + ص^2}$ ، أنظر الشكل المرفق ، وعليه :

فإن النقطة الأولى بعدها عن نقطة الأصل $\sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ وحدة طول

، النقطة الثانية بعدها عن نقطة الأصل $\sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ وحدة طول

، النقطة الثالثة بعدها عن نقطة الأصل $\sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ وحدة طول

\therefore أبعاد هذه النقط هى : $\sqrt{5}$ ، $3\sqrt{5}$ ، $5\sqrt{5}$

◀ الحل :

نفرض أن المبالغ هي : $(1 - d)$ ، (1) ، $(1 + d)$.

$$\therefore 21 = (1 + d) + (1) + (1 - d)$$

$$\therefore 21 = 13 \quad \therefore 7 = 1$$

\therefore فمقادير هذه المبالغ كالتالى :

$$7 - d ، 7 ، 7 + d$$

وبعد إضافة المبالغ المذكورة لكل منهم تصبح كالتالى :

$$(7 - d) + 8 ، (7) + 5 ، (7 + d) + 1$$

$$\therefore 11 - d ، 12 ، 15 + d \text{ تكون فى توال هندسى}$$

$$\therefore (11 - d)(15 + d) = 12^2 \text{ (من خواص المتوالى الهندسية)}$$

$$\therefore 165 - 14d = 144$$

$$\therefore 21 - 14d = 0$$

$$(7 + d)(3 - d) = 0$$

$$\therefore \text{إما } d = 7 \text{ = صفر ومنها } d = -7$$

فتكون المبالغ : $(1 - d)$ ، 1 ، $(1 + d)$ [حيث $1 = 7$ ، $d = -7$]

$$\text{أى : } (7 - 7) ، 7 ، (7 + 7)$$

أى : 14 ، 7 ، صفر وهذا الحل مرفوض

لأن كل من الثلاثة أشخاص لديه مبلغ ما أى أن ما مع الثالث ليس صفراً

ولما $d = 3$ وعليه تكون المبالغ : $7 - 3$ ، 7 ، $3 + 7$ أى 4 ، 7 ، 10

ومجموعها 21 ، فإذا أضفنا المبالغ المذكورة تصبح المبالغ كالتالى :

$$4 + 8 ، 7 + 5 ، 10 + 1$$

$$\text{أى : } 12 ، 12 ، 18$$

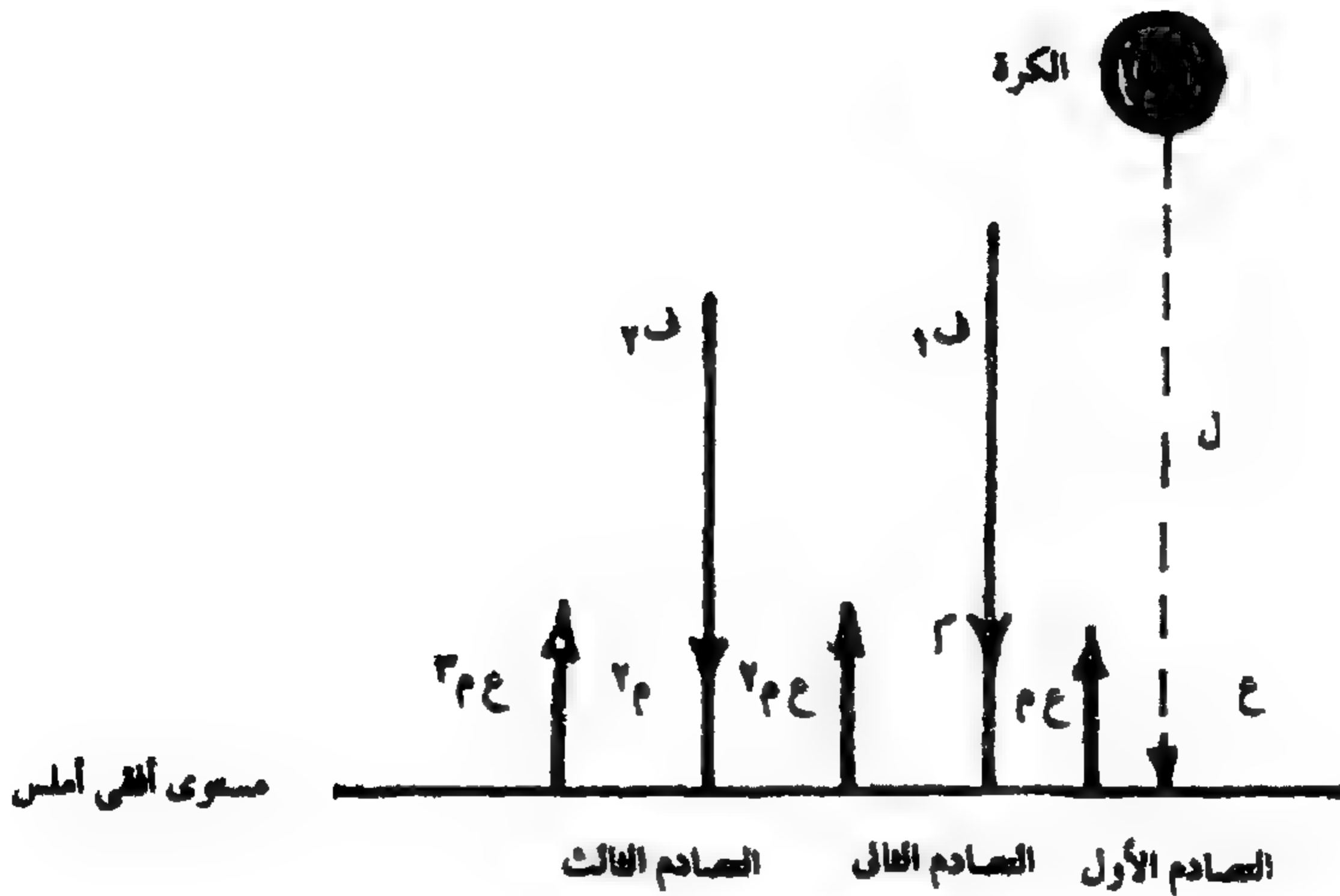
حيث $\frac{12}{8} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ وهو أساس المتوالية الهندسية .

٧ - سقطت كرة من المطاط رأسياً لأسفل نحو مستوى أفقى أملس فهل يمكن حساب مجموع المسافات الرأسية التي تحركها الكرة حتى تسكن تماماً ؟

$$\text{ثم أثبت أنها تساوى : } [\left(\frac{2^m + 1}{2^m - 1} \right) L]$$

حيث L هي المسافة التي سقطت فيها الكرة وهي تساوى ٤٩ متراً .
 $m =$ معامل إرتداد الكرة $= \frac{1}{4}$ ، احسب كذلك مجموع الأزمنة إلى أن تقف الكرة .

◀ الحل :



إذا فرضنا أن سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالأرض لأول مرة E ، فإنها ترتد لأول مرة بسرعة مقدارها $E \times m$ حيث ترتفع لأعلى مسافة رأسية مقدارها F_1 ثم تعاود الإصطدام بسرعة $E \times m$ فترتد لأعلى بسرعة $E \times m^2$ وهكذا .

ويكون مجموع المسافات الرأسية التي تتحركها الكرة حتى تقف هو :

$$F = L + 2F_1 + 2F_2 + 2F_3 + \dots + F_\infty$$

$$٢ع = ٢ع^2 \text{ صفر} + ٢ ج ف$$

حيث ع سرعة الكرة في أى لحظة ، ع صفر سرعة السقوط الابتدائية ، ج عجلة الجاذبية الأرضية ، ف المسافة التى تسقطها الكرة

$$\therefore ٢ع = ٢ع^2 \text{ صفر} + ٢ ج ف$$

$$\therefore ع = ٢/٢ ج ف = ٢/٢ ج ل$$

(وهى سرعة الاصطدام بالأرض لأول مرة)

ويمكن حساب قيمة المسافة ف_١ كالتالى :

$$\therefore ٢ع = ٢ع^2 \text{ صفر} + ٢ ج ف [\text{السرعة النهائية عند أقصى ارتفاع ع} = \text{صفر}]$$

$$\therefore \text{صفر} = ٢م^2 (٢ ج ل) - ٢ ج ف١ \dots\dots$$

[إشارة سالب ، لصعود الكرة ، سرعة الصعود لأول مرة = م ع]

$$\therefore ف١ = ٢م ل$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب ف_٢

$$ف٢ = ٢م = ٢م ل ف٣ = ٢م ل ، \dots \text{ إلخ .}$$

وعلى هذا فإن مجموع المسافات الرأسية :

$$ف = ل + ٢م ل + ٢م ل + ٢م ل + ٢م ل + \dots\dots$$

$$= ل + ٢ [٢م ل + ٢م ل + ٢م ل + \dots\dots + ٢م ل]$$

ويلاحظ أن المقدار بين القوسين عبارة عن متوالية هندسية لا نهائية .

$$\text{حدها الأول (} ٢م ل \text{) وأساسها} = ٢م = \frac{٢م ل}{٢م ل}$$

وبالتالى فإن مجموعها إلى ما لا نهاية يمكن حسابه بالقانون : ج = $\frac{١}{١-٢م}$

حيث ج = المجموع ، ١ = الحد الأول ، ٢م = الأساس

$$\therefore \text{فمجموعها} = \frac{٢م ل}{٢م - ١}$$

$$\therefore \text{ف الكلية} = ل + ٢ = \frac{٢م ل}{[٢م - ١]} = \frac{ل [٢م + ١]}{[٢م - ١]} \dots\dots (١)$$

ولحساب الزمن الذي تستقر بعده الكرة نقول :

$$\therefore \text{ف} = \text{ع} \text{ صفر } n + \frac{1}{2} \text{ ج } n^2 [n = \text{زمن سقوط الكرة لأول مرة}]$$

$$\therefore \text{ث} = \text{صفر} = \frac{1}{2} \text{ ج } n^2$$

$$\therefore n = \sqrt{\frac{2 \text{ ل}}{\text{ج}}}$$

$$\text{وبنفس الطريقة : } n = 2 \text{ م } \sqrt{\frac{2 \text{ ل}}{\text{ج}}} , n = 3 \text{ م } \sqrt{\frac{2 \text{ ل}}{\text{ج}}}$$

$$\therefore n = n + n + n + \dots + \infty$$

$$= \sqrt{\frac{2 \text{ ل}}{\text{ج}}} [1 + 2 \text{ م } + 3 \text{ م } + \dots + \infty \text{ م }]$$

$$= \sqrt{\frac{2 \text{ ل}}{\text{ج}}} + \sqrt{\frac{2 \text{ ل}}{\text{ج}}} + \dots + \infty \text{ م } =$$

وبنفس الطريقة فإن المجموع بين القوسين هو متوالية هندسية لا نهائية حدها

$$\text{الأول } 1 = 2 \text{ م} \text{ وأساسها } r = \frac{2 \text{ م}}{2 \text{ م}} = 1$$

$$\therefore \text{مجموعها} = \frac{2 \text{ م}}{2 \text{ م} - 1}$$

$$\therefore n = \sqrt{\frac{2 \text{ ل}}{\text{ج}}} [1 + \frac{2 \text{ م}}{2 \text{ م} - 1}] = \sqrt{\frac{2 \text{ ل}}{\text{ج}}} \frac{2 \text{ م} + 2 \text{ م} - 1}{2 \text{ م} - 1}$$

$$\therefore n = \sqrt{\frac{2 \text{ ل}}{\text{ج}}} \frac{2 \text{ م}}{2 \text{ م} - 1} \dots (2)$$

فإذا فرضنا أن $n = 49$ متراً مثلاً وأن معامل الارتداد $m = 0,5$

\therefore من المعادلة (1) :

$$\text{ف} = 49 = \left[\frac{0,25 + 1}{0,25 - 1} \right] 49 = \frac{1,25}{0,75} \times 49 = 81,66 \text{ متراً}$$

، n من المعادلة (2) :

$$n = \sqrt{\frac{49 \times 2}{9,8}} \left(\frac{0,5 + 1}{0,5 - 1} \right) = 3 \sqrt{10} = 9,49 \text{ ثانية}$$

٨ - سقطت كرة من إرتفاع ٦٤ متراً فاصطدمت بالأرض وعادت مرتدة لأعلى لمسافة $\frac{3}{4}$ المسافة التي سقطتها ثم عادت للسقوط والإرتداد إلى أن سكنت وفي كل مرة ترتد لأعلى مسافة تساوي $\frac{3}{4}$ المسافة التي سقطتها ومطلوب منك أن تحسب المسافة التي سقطتها الكرة عند اصطدامها بالأرض للمرة الثامنة ، كذلك يراد معرفة مجموع المسافات التي تحركتها الكرة منذ لحظة سقوطها وحتى سكونها .

الحل :

∴ الكرة تسقط من إرتفاع ٦٤ متراً وعند إرتدادها لأعلى فإنها ترتد لمسافة $= 64 \times (\frac{3}{4})$ متراً ثم عند سقوطها للمرة الثانية تعود فترتد

$$\text{لمسافة} = (\frac{3}{4}) \times [(\frac{3}{4}) \times 64] = (\frac{3}{4})^2 \times 64$$

وفي المرة الثالثة ترتد لمسافة $= (\frac{3}{4})^2 \times 64$ ، وهكذا ...

$$\text{وفي المرة الثامنة فإنها ترتد لمسافة} = 64 \times (\frac{3}{4})^8 = \frac{83}{84}$$

$$= \frac{83}{84} = \frac{1066}{1074} \approx 7,41 \text{ متراً}$$

أما مجموع المسافات التي تقطعها حتى تستقر :

$$= 64 + [64 \times \frac{3}{4}] + [64 \times (\frac{3}{4})^2] + \dots + \infty$$

$$= 64 - [64 - 64 \times (\frac{3}{4}) + 64 \times (\frac{3}{4})^2 - \dots - \infty]$$

والمقدار عينا بين القوسين يمثل متوالية هندسية لانهاية حدها الأول $= 64$

وأساسها $= \frac{3}{4}$ ،

$$\therefore \text{فمجموعها} = \frac{64}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{64}{-0,25} = -256$$

$$\therefore \text{مجموع المسافات} = 2 \times (256) - 64 = 512 - 64 = 448 \text{ متراً}$$



٩ - عاملان بدأ كل منهما العمل بمرتب سنوى قدره ٨٤٠ جنيهاً ، وكان الأول يحصل على علاوة سنوية ثابتة قدرها = ١٥ جنيهاً بينما الثانى يحصل على علاوة سنوية قدرها ٤٪ من مرتبه فى السنة السابقة ،

والمطلوب حساب مرتب كل منهما فى السنة الثلاثين من بدء عملهم ،
وكم يجب أن تكون العلاوة السنوية للأول حتى يتساوى مرتبه مع مرتب زميله فى تلك السنة وما مجموع الأجور التى تقاضاها كل منهما فى هذه المدة .

◀ الحل :

إذا نظرنا إلى مرتبات الأول على مدار السنوات نجدها كالتالى :

فى السنة الأولى = ٨٤٠

فى السنة الثانية = (٨٤٠ + ١٥)

فى السنة الثالثة = (٨٤٠ + ١٥) + ١٥ ، وهكذا ..

نجدها تمثل متوالية عددية حدها ١ = ٨٤٠ وأساسها د = ١٥

بينما مرتبات الثانى تكون كالتالى :

فى السنة الأولى = ٨٤٠

فى السنة الثانية = $٨٤٠ \times \frac{١٠٤}{١٠٠}$

فى السنة الثالثة = $(٨٤٠ \times \frac{١٠٤}{١٠٠}) \times \frac{١٠٤}{١٠٠}$

= $٨٤٠ \times (\frac{١٠٤}{١٠٠})^٢$ ، وهكذا ..

نجدها تمثل متوالية هندسية حدها الأول ١ = ٨٤٠ وأساسها ر = ١,٠٤

∴ مرتب الأول فى السنة الثلاثين من بدء عمله .

ح. ٣ = ١ + ٢٩ = ٢٩ + ٨٤٠ = ١٥ × ٢٩ + ٨٤٠ = ٤٣٥

= ١٢٧٥ جنيهاً [أى ١٠٦,٢٥ جنيه شهرياً]



بيننا مرتب الثاني = ح. ٣ = ١

$$٢٩ \times ٨٤٠ = ٢٩(١,٠٤) \times ٨٤٠ = ٢٩,١١٩$$

$$\approx ٢٦١٩ \text{ جنيهاً أى } [٢١٨,٢٥ \text{ جنيهاً شهرياً}]$$

ولكى يكون مرتب الأول فى السنة الثلاثين ح. ٣ مساوياً لمرتب الثاني فى

السنة الثلاثين ح. ٣ فإن :

$$٨٤٠ + ٢٩ د لا بد وأن تساوى = ٢٦١٩$$

$$\therefore ٢٩ د = ٢٦١٩ - ٨٤٠ = ١٧٧٩$$

$$\therefore د = \frac{١٧٧٩}{٢٩} = ٦١,٣٥ \text{ جنيهاً}$$

أى يجب أن يزيد مرتب الأول سنوياً بمقدار ٦١,٣٥ جنيهاً لى يتساوى مرتبها فى السنة الثلاثين (فقط) .

ولحساب الأجور التى تقاضاها الأول خلال ٣٠ عاماً :

$$\therefore ج = \frac{ن}{٢} [٢ + (١ - ن) د] \text{ حيث } ن = ٣٠ \text{ عاماً .}$$

$$\therefore ج = \frac{٣٠}{٢} [٢ + (١ - ٣٠) ٦١,٣٥]$$

$$= ١٥ [١٦٨٠ + ٤٣٥] = ٢١١٥ \approx ٣١٧٢٥ \text{ جنيهاً .}$$

بيننا مجموع أجور الثاني :

$$ج = \frac{١ - ر ن}{١ - ١,٠٤} \times ٨٤٠ = \frac{[١ - ٣(١,٠٤)]}{١ - ١,٠٤} \times ٨٤٠$$

$$= \frac{[١ - ٣,٢٤٣]}{٠,٠٤} \times ٨٤٠$$

$$= \frac{٢,٢٤٣}{٠,٠٤} \times ٨٤٠ = ٤٧١١١ \text{ جنيهاً}$$

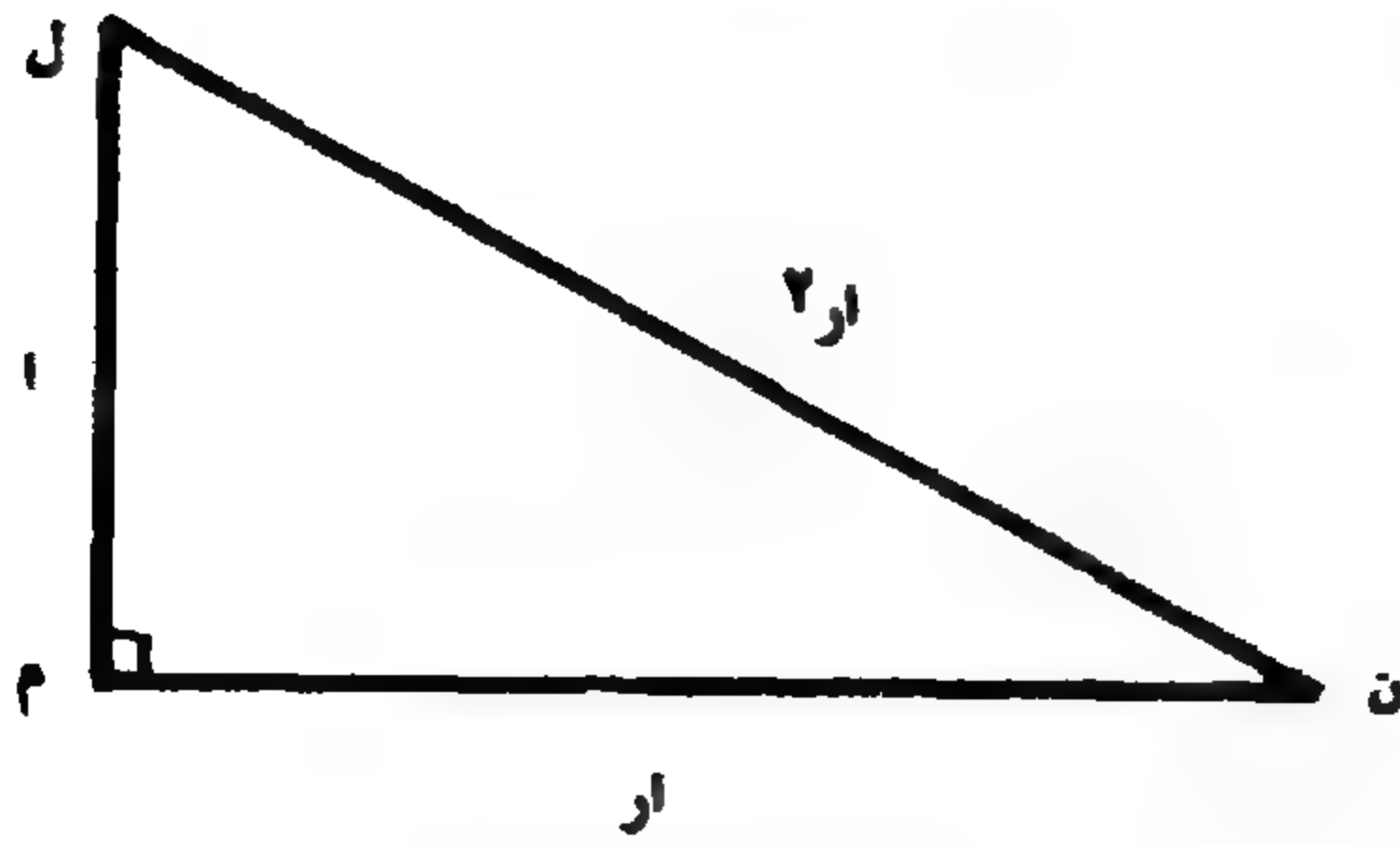
والفرق بين دخليهما خلال ٣٠ عاماً =

$$١٥٣٨٦ = ٣١٧٢٥ - ٤٧١١١ \text{ جنيهاً}$$



١٠- إذا كانت أطوال أضلاع مثلث ل م ن القائم الزاوية في م تكون متوالية هندسية ، فالمطلوب هو حساب جيوب الزوايا الحادة في هذا المثلث .

◀ الحل :



نفرض أطوال الأضلاع هي ل ، ار ، لر

ومن هندسة الشكل $\therefore (لر)^2 = (ل)^2 + (ن)^2$

$$\therefore لر^2 = ل^2 + ن^2 \quad \therefore لر^2 - ل^2 - ن^2 = 0$$

$$\therefore لر^2 - ل^2 - ن^2 = 0$$

ويوضع $لر = ك$ \therefore المعادلة تصبح $ك^2 - ل^2 - ن^2 = 0$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في ك ويمكن إيجاد قيمتي ك باستخدام القانون :

$$\therefore ك = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 0}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 1}{2}$$

$$= \frac{1 + 1}{2} = 1 \text{ والقيمة الأخرى السالبة مرفوضة بالطبع .}$$

$$\therefore لر = 1 \text{ ، } لر = 1$$

$$\text{وعليه فإن جيب زاوية ل} = \frac{ل}{لر} = \frac{1}{1} = 1$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{، جيب زاوية ن} = \frac{ن}{لر} = \frac{0}{1} = 0$$

١١- رُصت مجموعة من الكرات المتساوية حجماً على شكل مثلث ، بحيث
يحتوى الصف الأول على كرة واحدة والصف الثانى على كرتين والصف
الثالث على ثلاث كرات ، ... وهكذا ،
المطلوب هو حساب عدد الصفوف إذا كان العدد الكلى للكرات
المرصوفة هو ١٢٠ كرة وكذلك عدد الكرات بالصف الأخير .
◀ **الحل :**

من الواضح أن أعداد الكرات فى الصفوف تمثل متوالية عددية حدها
الأول = ١ = ١ وأساسها د = ١ كذلك ،
∴ مجموع الكرات = ١٢٠ كرة

$$\therefore ج = \frac{n}{2} [12 + (n-1)d] ، \text{ حيث } n = \text{عدد الصفوف (الحدود)}$$

$$\therefore 120 = \frac{n}{2} [1 \times (1-n) + 1 \times 2] = \frac{n}{2} [n + 1]$$

$$\therefore 240 = n^2 + n$$

$$(n+16)(n-15) = \text{صفر}$$

$$\therefore n = 15 \text{ صفاً .}$$

ومن المنطقى أن عدد الكرات فى كل صف مساوى لرتبة الصف . أى أن
عدد الكرات بالتصف الخامس عشر = خمسة عشر كرة
أ، يمكن حسابها كالتالى :

$$ح 15 = 1 + (n-1)d = 1 + (15-1) \times 1$$

$$= 1 + 14 = 15 \text{ كرة ، وهو ما يؤكد الإجابة السابقة}$$



١٢- رُصت مجموعة من الكرات المتماثلة لتكون مثلثاً متساوى الأضلاع
بحيث يحتوى الصف الأول على كرة واحدة والصف الثانى على كرتين
والصف الثالث على ثلاث كرات ، وهكذا .

وإذا أضفنا ٦٦٩ كرة أخرى ، كونت هذه الكرات مربعاً يحتوى كل حرف منه على ٨ كرات أقل من عدد الكرات الموجودة في ضلع المثلث المتساوى الأضلاع ، فأوجد عدد الكرات في الحالة الأولى .

◀ الحل :

في الحالة الأولى يكون عدد الكرات في الصفوف عبارة عن متوالية عددية حدها الأول $1 = 1$ وأساسها $1 = 1$ كذلك .

$$\therefore \text{فمجموع الكرات} = ج = \frac{n}{2} [2 + (n - 1)]$$

$$ج = \frac{n}{2} [2 + n - 1] = \frac{n}{2} [1 + n] \text{ كرة} \dots (1)$$

وبإضافة ٦٦٩ كرة لهذا المجموع يصبح عدد الكرات :

$$\dots (2) \quad \left[\frac{n}{2} (1 + n) + 669 \right] \text{ كرة}$$

، \therefore عدد الكرات في ضلع المثلث يكون مساوياً لعدد الصفوف n ويكون المجموع في المعادلة الثانية مربعاً كاملاً طول ضلعه يساوى $(n - 8)$ ، ويكون عدد الكرات في هذا المربع :

$$\dots (3) \quad = (n - 8) \times (n - 8) = (n - 8)^2$$

وحيث أن عدد الكرات في (٢) هو نفسه في المعادلة (٣) ،

$$\therefore \frac{n}{2} (1 + n) + 669 = (n - 8)^2$$

$$\therefore n^2 + n + 1338 = 2n^2 - 32n + 128$$

$$\therefore n^2 - 33n - 1210 = \text{صفر}$$

$$\therefore (n - 55)(n + 22) = \text{صفر}$$

$$\therefore n = 55 \text{ صفّاً .}$$

\therefore عدد الكرات في الحالة الأولى ، من المعادلة (١) يكون مساوياً :

$$\frac{n}{2} (1 + n) = 56 \times \frac{55}{2} = 1540 \text{ كرة .}$$

١٣- عدد مكون من ٣ أرقام تكون متوالية عددية ، وعند قسمة هذا العدد على العدد المكون من مجموع أرقامه يكون الناتج = ٤٨ والفرق بين هذا العدد وبين العدد المكون من نفس الأرقام عند كتابتها بعكس الترتيب الأول = ١٩٨ .

المطلوب هو معرفة العدد .

◀ الحل :

نفرض أن رقم الآحاد بهذا العدد = ١

∴ رقم العشرات = ١ + د

، رقم المئات = ١ + ٢ د

وذلك لأن أرقام العدد تُكون متوالية عددية

∴ قيمة هذا العدد = ١ + (١ + د) × ١٠ + (١ + ٢ د) × ١٠٠

$$= ١١١ + ٢١٠ د \dots\dots\dots (١)$$

، مجموع أرقام هذا العدد = (٣ + ١ د) (وهو عدد جديد)

$$\therefore ٤٨ = \frac{١١١ + ٢١٠ د}{٣ + ١ د}$$

$$\therefore ١١١ + ٢١٠ د = ١٤٤ + ١٤٤ د$$

$$\therefore ٦٦ = ١٣٣ د$$

$$\therefore ٢ = د \text{ ومنها } \therefore ٢ = د$$

.....(٢)

والعدد المكون من نفس أرقام العدد الأصلي ولكن بصورة معكوسة هو :

$$= ١ + (١ + د) + ١٠ × (١ + د) + ١٠٠ × ١$$

$$= ١١١ + ١٢ د \dots\dots\dots (٣)$$

وبطرح المعادلة (٣) من المعادلة (١) :

$$\therefore ١٩٨ = (١١١ + ١٢ د) - (١١١ + ٢١٠ د)$$

$$\therefore ١٩٨ = د \quad \therefore ١ = د$$

ومن المعادلة (٢) :

$$2 = 1 \times 2 = 2 = 1 \dots$$

∴ أرقام العدد الأصلي هي $2 = 1$ ، $3 = 2 + 1$ ، $4 = 3 + 2 + 1$ ،
 ∴ العدد الأصلي هو ٤٣٢

$$198 = 234 - 432 ، 48 = \frac{432}{9} = \frac{432}{4 + 3 + 2} ،$$



١٤- وزع مبلغ من المال على ثمانية أشخاص ، بحيث يأخذ الأول مبلغاً قدره جنيهان ، ويأخذ الثاني نصيباً يزيد عن نصيب الأول ، بنفس مقدار زيادة الثالث عن الثاني ، ، بنفس مقدار زيادة الثامن عن السابع .
 وكان نصيب الثاني ونصيب الثالث ، كل منهما يعادل مربع كامل لرقمين متتاليين ، فما جملة المبلغ الذي تم توزيعه وما نصيب الشخص الثامن .

◀ الحل :

واضح من المسألة أن المبالغ التي يأخذها الأشخاص من الأول وحتى الثامن تكون في توالٍ عددي والحد الأول في هذه المتوالية هو نصيب الأول $2 =$ جنيه والأساس مجهول وليكن d

$$\text{وحيث أن نصيب الثاني} = 2 + d$$

$$، \text{ وحيث أن نصيب الثالث} = 2 + 2d$$

وكل منهما يعادل مربع كامل لرقمين متتاليين وليكن الرقمين n ، $n + 1$

$$\therefore 2n = d + 2 \dots (1)$$

$$، 2(n + 1) = d + 2 \dots (2)$$

من (١) ، (٢) :

$$\therefore (2n - 2) = d$$

$$، 2 + 2(n - 2) = 2n + 2 + n + 1$$

$$\therefore 2 + 2n - 2n - 4 - 2 - n = 1 = \text{صفر}$$

$$\therefore 2n - 2 - n = 3 = \text{صفر}$$

$$(n - 3)(n + 1) = \text{صفر} ، ومنها$$

$$\therefore n = 3 ، n = 1 \text{ وتُرفض الإجابة السالبة بالتطبع}$$

$$\therefore n = 3 ، من المعادلة (١) : 9 = 2 + 2 \therefore 9 = 2 - 9 = 7$$

$$\therefore 7 = 5$$

$$\therefore \text{الأنصبة هي كالتالي : 2 ، 9 ، 16 ، ، 51}$$

$$\text{ومجموع الأنصبة حتى الثامن : ج} = \frac{n}{2} [2 + (n - 1)]$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{8}{2} [2 + (8 - 1)] = 7 \times 7 + 2 = 51$$

$$= 4 [4 + 49] = 212 \text{ جنيهاً .}$$

$$، نصيب الثامن = ح = 8 = 1 + (n - 1) = 2 + 7 \times 7 = 51 \text{ جنيهاً}$$



١٥ - متوالية هندسية مجموعها إلى ما لا نهاية من الحدود = ١٣.٥ ، وأي حد فيها يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له بأجمعها ، فأوجد المتوالية ومجموع حدودها التسعة الأولى وما الفرق بين مجموعها إلى ما لا نهاية ومجموع التسعة حدود الأولى .

◀ الحل :

نفرض أن الحد الأول في هذه المتوالية هو ١ وأن الأساس = ر

$$\therefore \text{مجموعها إلى ما لا نهاية ج} = \frac{1}{r - 1} = \frac{27}{2} \therefore \text{..... (١)}$$

، أي حد في هذه المتوالية يساوي ضعف مجموع الحدود الباقية إلى ما لا نهاية :

$$\therefore 1 = 2 [1r + 2r + 3r + \dots + \infty r] \therefore \text{..... (٢)}$$

والمقدار فيما بين القوسين يمثل متوالية هندسية لا نهائية حدها الأول = ١ ر
وأساسها = ر

$$\therefore \text{فمجموعها} = \frac{\text{الحـد الأول}}{١ - \text{الأساس}}$$

$$\therefore \text{مجموعها} = \frac{١}{١ - ر}$$

$$\therefore \text{من المعادلة الثانية : } ١ = ٢ \times \frac{١}{١ - ر}$$

$$\therefore ١ - ر = ٢ \text{ ومنها } ر = \frac{١}{٣} \therefore \text{..... (٣)}$$

والتعويض عن قيمة ر من المعادلة (٣) في المعادلة (١) :

$$\therefore \frac{٢٧}{٢} = \frac{١}{(\frac{١}{٣}) - ١}$$

$$\therefore \frac{٢٧}{٢} = \frac{١٣}{٢} \text{ ومنها } ٩ = ١ \therefore \text{..... (٤)}$$

، من (٣) ، (٤) . المتوالية تكون كالتالى :

$$٩ ، ٣ ، ١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩} ، \infty$$

$$\text{ومجموع التسعة حدود الأولى جـ} = \frac{[١ - ر^٩]}{١ - ر} \text{ (لأن } ر > ١ \text{)}$$

$$\therefore \text{جـ} = \frac{[١ - (\frac{١}{٣})^٩]}{\frac{١}{٣} - ١}$$

$$= \frac{٢٧ \times ٩ - ٣}{٢} - \frac{٢٧}{٢} = [٩ - ٣ - ١] \frac{٢٧}{٢} =$$

$$= \frac{١}{٢٧ \times ٢٧ \times ٢} - \frac{٢٧}{٢} = \frac{٦ - ٣}{٢} - \frac{٢٧}{٢} =$$

$$= \left(\frac{١}{١٤٥٨} - \frac{٢٧}{٢} \right)$$

١٦- ما هو الشرط اللازم لكي يكون مجموع متوالية حسابية مساوية لعدد حدودها .

◀ الحل :

المتوالية الحسابية تكون في الصورة ١ ، ١ + د ، ١ + ٢ د ، ، ل
حيث ١ = الحد الأول ، د = الأساس ، ل = الحد الأخير ، ن = عدد الحدود

ويكون مجموع هذه المتوالية بدلالة الحد الأخير والحد الأول :

$$ج = \frac{ن}{٢} (ل + ١)$$

وحتى تكون ج مساوية لـ ن فإننا نضع ن بدلاً من ج في المعادلة السابقة :

$$\therefore ن = \frac{ن}{٢} (ل + ١) \text{ ومنها : } ٢ = ل + ١$$

وهذا هو الشرط اللازم أى يجب أن يكون مجموع كلاً من حديها الأول والأخير مساوياً ٢ دائماً ، وكمثال المتوالية التالية :

$$٠,٤ ، ٠,٦ ، ٠,٨ ، ١ ، ١,٢ ، ١,٤ ، ١,٦$$

$$\text{حدها الأول} = ٠,٤ \quad \text{حدها الأخير} = ١,٦ \quad \text{أساسها} = ٠,٢$$

$$\text{مجموع حدودها} = ٧ \quad \text{عدد حدودها} = ٧$$

$$\text{مجموع حديها الأول والأخير} = ٢ = ٠,٤ + ١,٦$$



$$١٧ - \text{كيف يمكنك إيجاد قيمة الكسر الآتي : } \frac{١٦ + ١٢ + ٩ + \dots + \infty}{١ + \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٩} + \dots + \infty}$$

◀ الحل :

واضح أن هذا الكسر عبارة عن متوالية هندسية لا نهائية بسطاً ومقاماً

ولما كان مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية $= \frac{\text{الحد الأول}}{1 - \text{الأساس}}$

، بالنسبة لمتوالية البسط فحدها الأول ١٦

$$\text{وأساسها} = \frac{12}{16} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

، بالنسبة لمتوالية المقام فحدها الأول ١

$$\text{وأساسها} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{4}{16}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{قيمة هذا الكسر} = \frac{\frac{3}{4} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{\frac{3}{4} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{64}{3}$$



١٨- في أحد أنواع الفئران كان التكاثر يتم بحيث أن كل أنثى تضع ٨ فئران نصفهم من الإناث ، والمطلوب منا معرفة إنتاج أربعة أزواج [٤ ذكور ، ٤ إناث] عبر عشرة أجيال (حوالي عام) وعلى اعتبار أن التكاثر يتم فقط بين فئران الجيل الواحد .

◀ الحل :

من المعروف أن كثير من الحيوانات يتم التكاثر فيما بين الآباء والأبناء والأحفاد ففي حالة الفئران مثلاً يحدث بالطبع أن يتكاثر فأر من الجيل الرابع مثلاً مع فأره من الجيل الثاني أو الثالث مما يزيد من تعقيد العملية وصعوبة حسابها ولهذا فإننا نبسط العملية باعتبار أن التكاثر يتم بين فئران الجيل الواحد فقط .

وفي مسألتنا هذه فإن الفئران في كل جيل تُكون متوالية هندسية أساسها = ٤ [كل زوج يتكاثر يُعطي ٤ أزواج] ، عدد الأجيال = عدد حدود المتوالية = ١٠

والحد الأول للمتوالية أى عدد الفأرات الإناث التى سيبدأ التكاثر بالنسبة

لها = ٤

$$\therefore ج = \frac{1 - ر^n}{1 - ر}$$

$$\therefore ج = ٤ \times \frac{1 - ١٠٤}{1 - ٤} \approx ١٠٤٨٥٧٥ \times \frac{٤}{٣} = ١٣٩٨١٠٠$$

أى ما يعادل ١,٤ مليون فأر تقريباً .

وبالطبع فإن قدرة الله تعالى ، لا تسمح بنمو هذا العدد المخيف فهناك حيوانات تتغذى على الفئران بالإضافة للأمراض والظروف البيئية وغيرها لا تسمح بالنمو بمثل هذا المعدل ، ولك أن تتصور لو ابتداء التكاثر بألف أنثى فقط ولا نقول ملايين فهذا المعدل يمكن لجنس الفئران أن يغطى الكرة الأرضية تماماً وبتكديس مخيف لا يبقى ولا يذر . فسبحان الله والحمد لله .



١٩- يراد تقسيم ٧٨٠ جنيهاً على ستة إخوة ، بحيث يأخذ الثانى مقداراً يزيد عما يأخذه الأول ويأخذ الثالث نفس المقدار زيادة عن الثانى .

وهكذا فالرابع يزيد عن الثالث والخامس عن الرابع والسادس عن الخامس وبحيث يكون ما يأخذه الثلاثة الأوائل $\frac{٥}{٨}$ ما يأخذه الثلاثة الآخرين .
الحل :

نفرض أن ما يأخذه الأول = س جنيهاً .

، \therefore مقدار ما يأخذه الثانى = س + ص جنيهاً .

، نفرض مقدار ما يأخذه الثالث = س + ٢ ص جنيهاً .

وهكذا ، حتى يأخذ السادس ما مقداره : س + ٥ ص جنيهاً .

$$\therefore س + (س + ص) + (س + ٢ ص) + (س + ٣ ص) + (س + ٤ ص)$$

$$+ (س + ٥ ص) = ٧٨٠$$

..... (١)

$$\therefore ٦ س + ١٥ ص = ٧٨٠$$

ولدينا مجموع الأنصبه للثلاثة الأول :

$$\text{س} + (\text{س} + \text{ص}) + (\text{س} + ٢\text{ص}) = ٣\text{س} + ٢\text{ص} \quad (٢) \dots\dots$$

ومجموع الأنصبه الباقية :

$$(\text{س} + ٣\text{ص}) + (\text{س} + ٤\text{ص}) + (\text{س} + ٥\text{ص}) = ٣\text{س} + ١٢\text{ص} \dots (٣)$$

ولكن المعادلة (٢) $\frac{٥}{٨} =$ المعادلة (٣) :

$$\therefore ٣\text{س} + ٢\text{ص} = \frac{٥}{٨} (٣\text{س} + ١٢\text{ص})$$

$$\therefore ٢٤\text{س} + ١٥\text{ص} = ١٥\text{س} + ٦٠\text{ص}$$

$$\therefore ٩\text{س} - ٣٦\text{ص} = \text{صفر}$$

$$\therefore ٣\text{س} - ١٢\text{ص} = \text{صفر}$$

$$\therefore ٦\text{س} - ٢٤\text{ص} = \text{صفر} \quad (٤) \dots\dots$$

من (١) ، (٤) وبحلها معاً :

$$٦\text{س} + ١٥\text{ص} = ٧٨٠ \quad (١) \dots\dots$$

$$٦\text{س} - ٢٤\text{ص} = \text{صفر} \quad (٤) \dots\dots$$

بطرح (٤) من (١) :

$$\therefore ٣٩\text{ص} = ٧٨٠$$

$$\therefore \text{ص} = ٢٠ \quad (٥) \dots\dots$$

وبالتعويض عن قيمة ص من (٥) في (٤) :

$$\therefore ٦\text{س} = ٢٠ \times ٢٤ = ٤٨٠ \quad \therefore \text{س} = ٨٠$$

\therefore فالأنصبه كالتالى :

$$٨٠ ، ١٠٠ ، ١٢٠ ، ١٤٠ ، ١٦٠ ، ١٨٠$$

$$\text{والأنصبه الثلاث الأولى} = ٨٠ + ١٠٠ + ١٢٠ = ٣٠٠$$

$$\text{والأنصبه الثلاث الأخيرة} = ١٤٠ + ١٦٠ + ١٨٠ = ٤٨٠$$

$$، \text{ يلاحظ أن } ٣٠٠ = \frac{٥}{٨} \times ٤٨٠$$

٢٠- ثلاثة أشخاص مجموع ما معهم ٣٣ جنياً فإذا علم أن ما مع الثالث ينقص عن الثاني بنفس المقدار الذى ينقص به الثاني عن الأول .

فإذا أضيف إلى ما مع الأول جنياً وأخذ من الثاني جنياً وأضيف للثالث جنيان لأصبح الأول معه ضعف ما مع الثاني والثاني معه ضعف ما مع الثالث ، فهل لك أن تدلنا على المبلغ الذى مع كل منهما .

◀ الحل :

فى الحالة الأولى فإن المبالغ التى معهم تُكوّن متوالية حسابية ،
مجموعها ٣٣ وحدها الأول غير معروف وأساسها غير معروف إلا أن عدد حدودها = ٣ (ثلاثة أشخاص) .

$$\therefore \text{ج} = \frac{n}{2} [2 + (n-1)d]$$

$$\therefore 33 = \frac{3}{2} [2 + (3-1)d]$$

..... (١)

$$\therefore 11 = 2 + d$$

وفى الحالة الثانية تكون المقادير التى معهم فى توالٍ هندسى لأنه هنالك نسبة ثابتة (الضعف) فيما بين الثاني والأول وهى نفسها فيما بين الثالث والثاني .

$$\therefore (1+d), (1-d+d), (1+d+2d) \text{ فى توالٍ هندسى}$$

$$\therefore (1+d)(1-d+d) = 2(1+d+2d)$$

ومع استعمال العلاقة (١) وبالاختصار :

$$\therefore 2d + d - d = 56 - d, \therefore (8+d)(7-d) = \text{صفر}$$

$$\text{ومنها } d = 8 \text{ أو } d = 7$$

$$\text{و } 19 = 1, \text{ أو } 4 = 1$$

$$\text{وباعتبار } 4 = 1, d = 7$$

∴ فبعد الإضافة يكون ما مع الأول (٤ + ١) والثاني يكون معه (٤ + ٧ - ١) أى أن الثاني سيكون معه ضعف الأول وهذا بخلاف المسألة .

وعليه فإن هذا الاحتمال مرفوض وتكون قيمة ١٩ ، $d = 8$

١٩ ، ١١ ، ٣ : امبائع هي

ومجموعها = ٣٣ ، وبعد الإضافة تكون المبالغ ٢٠ ، ١٠ ، ٥ وهو ما يؤكد صحة المسألة .



٢١- أقام أحد النوادي مسابقة في إحدى المناسبات ، حيث رسمت مجموعة من الخطوط المتوازية على أرض السباق طول كل خط = ٦٠ متراً ووضعت عملات نقود فئة الجنيه بين كل جنيه والآخر مسافة متران ويصطف المتسابقون في بداية الخطوط ، ويطلب من كل متسابق جمع هذه الجنيهات في الخط الخاص به بشرط إحضار جنيه بعد جنيه ووضعه في صندوق بأول الخط عند أول جنيه ، وذلك في أقصر وقت ممكن والفائز هو الذي يجمع جميع الجنيهات بالخط الخاص به في أقل وقت ممكن وقيمة الجائزة هي مجموع الجنيهات الموضوعة بالخط الخاص به .

والمطلوب هو حساب طول المسافة التي يقطعها المتسابق الفائز .

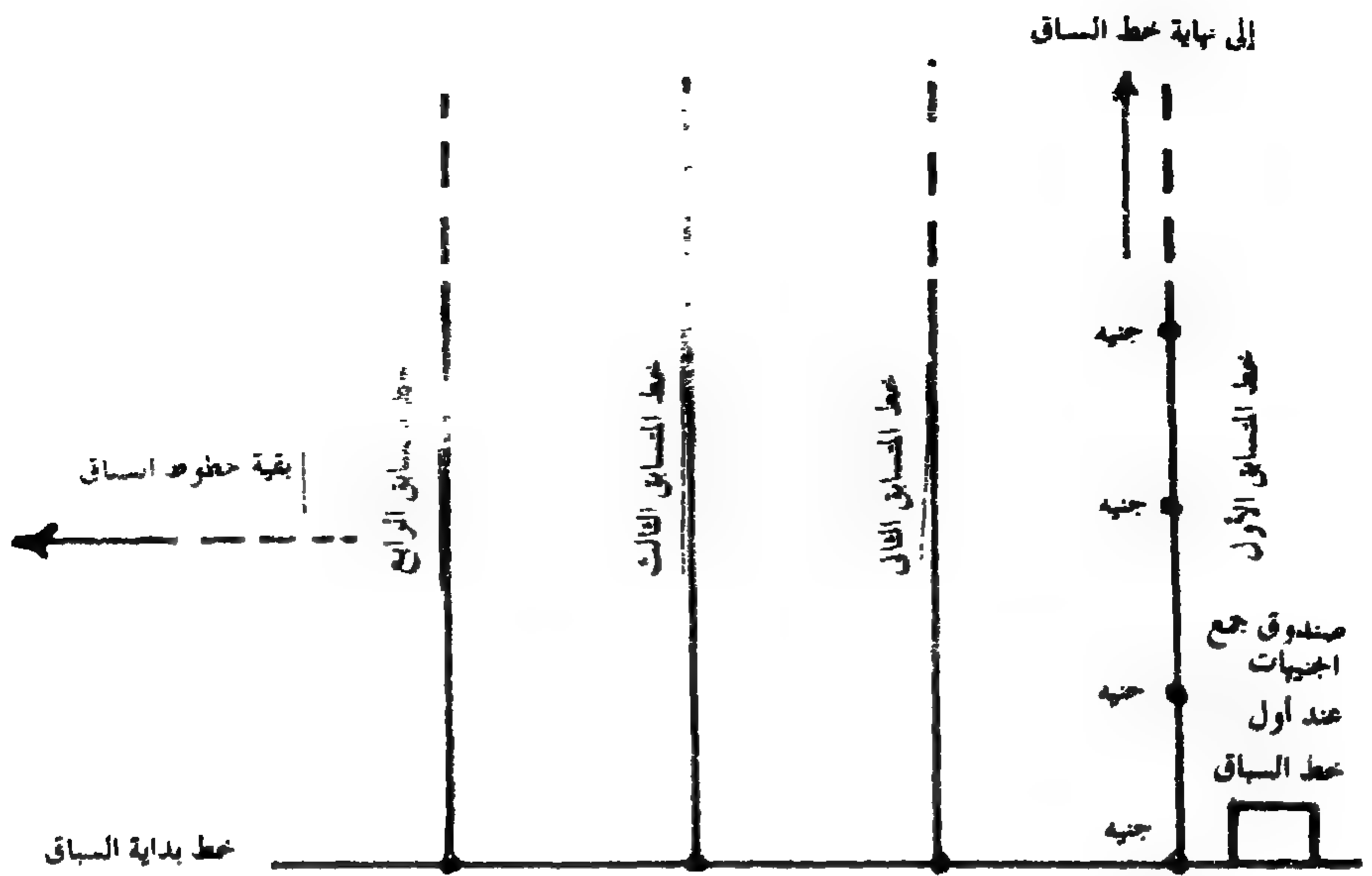
◀ الحل :

عدد المسافات بين أول جنيه عند بداية خط السباق وأخر جنيه عند نهاية خط السباق = $\frac{60}{2} = 30$ مسافة . كل منها متران

وعدد الجنيهات على كل خط = $30 + 1 = 31$ جنياً .

وللحصول على أول جنيه في بداية الخط فإن المتسابق لا يجرى أية مسافة تذكر فما عليه إلا أن يلتقطه وهو واقف ببداية الخط ووضعه رأساً في الصندوق الجاور له ،

بينما الجنيه الثاني فإنه يجرى مترين ثم يلتقطه ويعود أدراجه مسافة مترين لوضعه بالصندوق ، وهكذا فالجنيه الثالث عليه أن يجرى ٤ أمتار (مسافتان) ذهاب ، مثلهم عودة .



والجنيه الأخير رقم ٣١ فإن المتسابق يجري ٦٠ متراً (٣٠ مسافة) ويعود مرة ثانية نفس المسافة لوضعه بالصندوق .

وعليه فإن مجموع المسافات التي يجريها المتسابق يمكن التعبير عنها كالتالي :

$$\text{المسافة ف} = ٢ [٢ + ٤ + ٦ + ٨ + \dots \text{إلى } ٣٠ \text{ حداً}]$$

والمقدار بين القوسين يمثل متوالية عددية حدها الأول $١ = ٢$ وأساسها

$$د = ٢ \text{ وعدد حدودها } ن = ٣٠$$

$$\therefore \text{ ف} = ٢ \times \frac{ن}{٢} [٢ (١ - ن) + ١]$$

$$= ٢ \times \frac{٣٠}{٢} [٢ \times ٢٩ + ٢ \times ٢]$$

$$= ٢ \times ١٥ [٤ + ٥٨] = ٦٢ \times ٣٠ = ١٨٦٠ \text{ متراً .}$$



٢٢- أوجد مجموع الأعداد الصحيحة ابتداءً من ١ إلى ١٠٠ .

الحل :

الأرقام من ١ إلى ١٠٠ تمثل متوالية عددية حدها الأول $١ = ١$

وأساسها = ١ وعدد حدودها ن = ١٠٠ وحدها الأخير ل = ١٠٠

$$\therefore \text{فمجموعها ج} = \frac{ن}{٢} (١ + ل)$$

$$٥٠٥٠ = ١٠١ \times ٥٠ = (١٠٠ + ١) \frac{١٠٠}{٢} =$$



٢٣- أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الفردية ابتداء من ١ حتى ٩٩

◀ الحل :

المطلوب هو حساب مجموع الأعداد ١ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ٩٧ ، ٩٩
وهي متوالية عددية حدها الأول ١ = ١ ، أساسها د = ٢ وحدها الأخير
ل = ٩٩

$$\therefore \text{ح} = ٩٩ = ١ + (١ - ن) د = ١ + (١ - ن) ٢$$

$$\therefore ٩٩ = ٢ - ن \quad \therefore ١ - ن = ٥٠ \text{ حدا}$$

$$\therefore \text{فمجموعها ج} = \frac{ن}{٢} (١ + ل) = \frac{٥٠}{٢} (٩٩ + ١) = ٢٥٠٠$$



٢٤- أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الزوجية فيما بين ٢ ، ١٠٠

◀ الحل :

بنفس الطريقة فإن الحد الأخير ل = ١٠٠ ، ٢ = ١ ، ٢ = د

$$\therefore ١٠٠ = ٢ + (١ - ن) ٢$$

$$\therefore ٥٠ = ن$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{٥٠}{٢} [١٠٠ + ٢] = ٥١ \times ٥٠ = ٢٥٥٠$$



٢٥- أوجد مجموع جميع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ٣٠٠ ولا

تقبل القسمة على ١٣ .

◀ الحل :

جميع الأعداد هي ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ... ، ٢٩٩

وهي تُكوّن متوالية حسابية حدها الأول $101 = 1$ وأساسها $d = 1$

وحدها الأخير $l = 299$

$$\therefore \text{ح} = 1 + (n - 1)d$$

$$\therefore 299 = 101 + (n - 1) \times 1 = 100 + n$$

$$\therefore n = 199 \text{ عدداً}$$

بمعنى أنه هنالك ١٩٩ عدداً فيما بين ١٠٠ ، ٣٠٠ [تقبل ولا تقبل

القسمة]

ومجموع هذه الأعداد جـ

$$\text{جـ} = \frac{n}{2} [1 + l] = \frac{199}{2} [101 + 299]$$

$$= 29850 = 150 \times 199$$

ولنرى الآن الأعداد التي تقبل القسمة على ١٣ والمحصورة فيما بين ١٠٠ ،

٣٠٠ ، نجد أن هذه الأعداد هي : ١٠٤ ، ١١٧ ، ١٣٠ ، ... ، ٢٩٩

وهي متوالية حسابية فيها : $104 = 1$ ، $d = 13$ ، $l = 299$

$$\therefore 299 = 104 + (n - 1) \times 13$$

$$299 = 104 - 13 + 13 + (n - 1) \times 13 = 91 + 13n$$

$$\therefore n = \frac{208}{13} = 16 \text{ عدداً}$$

$$\text{ومجموعها} = \text{جـ} = \frac{16}{2} [13 \times (1 - 16) + 104 \times 2]$$

$$\text{أ، جـ} = \frac{16}{2} [299 + 104] = 403 \times 8 = 3224$$

\therefore مجموع الأعداد التي تقبل القسمة على ١٣ = ٣٣٢٤

وعليه فإن مجموع الأعداد التي لا تقبل القسمة على ١٣

$$= 26526 = 3224 - 29850$$

٢٦- كيف يمكنك وضع الكسر الدائر $٠,٧٢٣٤$ في صورة مجموع متوالية هندسية لانهاية ، وكيف يمكن حساب مجموعها حتى يصبح الكسر اعتيادياً .

◀ الحل :

عند إيجاد قيمة المقدار $\frac{1}{9}$ مثلاً نجدها $= ٠,١١١١١.... \infty$

ولسهولة الكتابة والإختصار نكتب $\frac{1}{9} = ٠,١$ أى نضع نقطة أو صفر فوق الرقم المتكرر إلى ما لا نهاية ويقصد به أنه رقم دائر أو مكرر

وكذلك عند قسمة $\frac{1}{11}$ مثلاً نجدها $= ٠,٠٩٠٩٠٩٠٩٠٠٠$

وإختصاراً نكتب $\frac{1}{11} = ٠,٠٩٠$ أى أن الصفر والتسعة مكرران أو دائران .

وفي مسألتنا هذه فإن المقدار :

$$٠,٧٢٣٤ = ٠,٧٢٣٤ \ ٢٣٤ \ ٢٣٤ \ ... \infty \text{ [أى أن ٢٣٤ دائرة]}$$

ويمكن كتابتها كالتالى :

$$٠,٧٢٣٤ = ٠,٧ + [٠,٠٢٣٤ + ٠,٠٠٠٠٢٣٤ + ٠,٠٠٠٠٠٠٢٣٤ + ... \infty]$$

والمقدار بين القوسين يمثل متوالية هندسية لانهاية حدداً الأول =

$$١ = ٠,٠٢٣٤ ، أساسها ر = \frac{٠,٠٠٠٠٢٣٤}{٠,٠٢٣٤} = \frac{١}{١٠٠٠}$$

$$\therefore \text{ فمجموعها إلى ما لانهاية جـ } = \frac{١}{ر-١} = \frac{٠,٠٢٣٤}{٠,٠٠١-١} = \frac{٠,٠٢٣٤}{٠,٩٩٩}$$

$$\therefore \text{ المقدار } = ٠,٧ + \frac{٢٣٤}{٩٩٩٠} + \frac{٧}{١٠} = \frac{٢٣٤}{٩٩٩٠} + ٠,٧ = \frac{٧٢٢٧}{٩٩٩٠}$$

أى أن مقدار الكسر العشري $٠,٧٢٣٤$ يمكن وضعه ككسر إعتيادى

$$\frac{٧٢٢٧}{٩٩٩٠}$$

وذلك كما ترى باستعمال المتواليات الهندسية اللانهائية .

٢٧- ضع ١٢٦,٠ في صورة كسر اعتيادي .

◀ الحل :

بنفس الطريقة فإن الرقم ١٢٦ (الواحد والستة والإثنين التي بينهما دائرة)

رقم دائر وعليه فإن ١٢٦,٠ \approx ∞ ١٢٦١٢٦١٢٦١٢٦

$$= ١٢٦,٠ + ٠,٠٠٠١٢٦ + ٠,٠٠٠٠٠٠٠١٢٦ + \dots \infty$$

والمقدار عبارة عن متوالية هندسية لانهاية، حيث حدها الأول

$$١ = ١٢٦,٠ \text{ وأساسها } ر = ٠,٠٠١$$

$$\text{ومجموعها ج} = \frac{١}{١ - ر}$$

$$\text{ج} = \frac{١٢٦,٠}{٠,٠٠١ - ١} = \frac{١٢٦,٠}{٠,٩٩٩} = \frac{١٢٦}{١١١}$$

$$\therefore ١٢٦,٠ = \frac{١٢٦}{١١١}$$



٢٨- حول الكسر الآتي ٣٥,٠ إلى كسر اعتيادي .

◀ الحل :

$$٣٥,٠ = \infty ٣٥٥٥٥٥ \dots$$

$$= \frac{٣}{١٠} + \left[\frac{٥}{١٠٠} + \frac{٥}{١٠٠} + \dots \infty \right]$$

والمقدار بين القوسين متوالية هندسية لانهاية حدها الأول $\frac{٥}{١٠٠}$

$$\text{وأساسها} = \frac{\frac{٥}{١٠٠}}{\frac{٥}{١٠٠} - ١} = ٠,١$$

$$\therefore \text{فمجموعها} = \text{ج} = \frac{١}{١ - ر} = \frac{\frac{٥}{١٠٠}}{٠,١ - ١} = \frac{١٠ \times ٥}{٩ \times ١٠٠} = \frac{١}{١٨}$$

$$\frac{16}{45} = \frac{32}{90} = \frac{1}{18} + \frac{2}{10} = 0,3\bar{5}.$$



٢٩- عند إيجاد قيمة المقدار (٥١) ٢٠ يتج لنا عدداً فلكياً ويساوى حوالى :

١٧١,٤ × ١٠ × ٣٤١٠ ولكن باستعمال نظرية ذات الحدين كيف يمكننا معرفة الأربعة أرقام الأولى من اليمين [الآحاد والعشرات والمئات والألوف]

◀ الحل :

نقول : (٥١) ٢٠ = (٥٠ + ١) ٢٠ وهو مقدار ذو حدين أحدهما الواحد والآخر هو ٥٠

وطبقاً لنظرية ذات الحدين فى مفكوك هذا المقدار (واحد وعشرون حداً)

$$\therefore (٥٠ + ١) ٢٠ = ٢٠ ق١ + ٢٠ ق٢ + ١٩١ × ٥٠ + ٥٠ ق٣$$

$$× ١٨١ × ٢٥٠ + ٢٥٠ ق٣ + ٢٥٠ × ١٧١ × ٢٥٠ + ٢١ حداً$$

وسوف نكتفى بالأربع حدود الأولى :

$$\therefore (٥٠ + ١) ٢٠ = ١ + ٥٠ × ٢٠ + \frac{١٩ × ٢٠}{٢} × ٢٥٠ +$$

$$+ \frac{١٨ × ١٩ × ٢٠}{١ × ٢ × ٣} × ١٢٥ +$$

$$= ١ + ١٠٠٠ + ٢٧٥٠٠٠ + ١٤٢٥٠٠٠٠٠$$

$$\therefore \text{الأربعة أرقام الأولى} = ١, ٠, ٠, ٦ \text{ أى } ٦٠٠١$$



٣٠- أوجد قيمة (١١) ٥ بطريقة سريعة .

◀ الحل :

يمكن إيجاد قيمة هذا المقدار بأكثر من طريقة غير أننا نريد إيجادها بنظرية ذات الحدين .

$$\begin{aligned}
& \therefore {}^0(11) = {}^0(10 + 1) = {}^0(1) + {}^0(10) = 1 + 10 = 11 \\
& {}^0(10) = {}^0(1) + {}^0(10) = 1 + 10 = 11 \\
& {}^0(1) = 1 \\
& \therefore 161051 = 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1 =
\end{aligned}$$



٣١- أوجد قيمة ${}^0(0,98)$ مقرباً الجواب إلى ثلاث أرقام عشرية .

◀ الحل :

يمكن إيجاد قيمة المقدار بكثير من الطرق إلا أننا ينبغي إيجادها مستخدمين في ذلك نظرية ذات الحدين .

والمقدار ${}^0(0,98)$ يمكن أن نكتبه في الصورة ${}^0(1 - 0,02)$

وهو مقدار من حدين (واحد ، $0,02$)

$$\therefore {}^0(1 - 0,02) = {}^0(1) - {}^0(0,02) = 1 - 0,02 = 0,98$$

$$= 1 - 0,02 = 0,98$$

$$= 1 - 0,02 = 0,98$$

$$= 1 - 0,02 = 0,98$$

$$= 1 - 0,02 = 0,98$$

$$= 1 - 0,02 = 0,98$$

$$= 1 - 0,02 = 0,98$$

وقد اكتفينا بأربعة حدود فقط وذلك لأن الحدين الأخيرين قيمة كل منهما

متناهية في الصغر .



٣٢- بدون فك المقدار $[\sqrt[5]{10} + \sqrt[5]{10}]$ ، هل يمكنك إيجاد

عدد الحدود الخالية من القوى الغير صحيحة ؟

◀ الحل :

لما كانت القوة المرفوع لها المقدار = ٧٥ ، فإن عدد حدود مفكوك هذا المقدار هي ٧٦ حداً ، ولما كان كلاً من حدى المقدار به جذر لذا فإنه من المنطقي أن يكون بعض هذه الحدود مرفوعاً لقوة كسرية كما أن هنالك بعض الحدود خالية من القوى الغير صحيحة (أى ذات قوى صحيحة) .

وحيث أن الحد العام فى هذا المفكوك = $x^r + 1 = x^{75} + 1$ (الحد الأول) \times (الحد الثانى) :

$$x^r + 1 = x^{75} + 1 \Rightarrow x^r = x^{75} \Rightarrow r = 75$$

ولكى يكون هذا الحد خالياً من القوى الغير صحيحة (أى ذو قوة صحيحة) فإنه يجب أن تكون r تقبل القسمة على كل من ٥ ، ١٠ بدون باق بحيث أن $\frac{r}{5}$ ، $\frac{r}{10}$ تعضى عدداً صحيحاً وبالتالى فإن المقدار $x^r + 1$ كذلك المقدار x^r سيكون ذو قوة صحيحة .

والأرقام التى تقبل القسمة على كل من ٥ ، ١٠ وبدون باق ومحصورة بين صفر ، ٧٥ هى [صفر ، ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠] .
فهنالك ثمانية حدود من جملة ٧٦ حداً ، خالية من القوى الغير صحيحة أى أن هنالك فقط ثمانية حدود ذات قوى صحيحة .

فمثلاً عندما $r = \text{صفر}$ ،

يصبح أول حد فى المفكوك حالياً من القوى الغير صحيحة هو :

$$x^0 + 1 = x^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

وعندما $r = 10$:

$$x^{10} + 1 = x^{10} + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$x^{75} + 1 = x^{75} + 1 = 1 + 1 = 2$$

وعندما ر - ٧٠

$$\therefore \text{الحد هو } = ٧٥ \text{ ق. ل. } ١٥ - \left(\frac{٧٠}{٥} \right) \times \left(\frac{٧٠}{١٠} - ٢ \right)$$

$$= ٧٥ \text{ ق. ل. } ٧٠ - ١٥ = ٥٥ \text{ م. } ٧٠$$

$$= ٧٥ \text{ ق. ل. } ٧٠ \text{ م. } ٧٠ \text{ وهو الحد السبعون}$$



٣٣- حول المقدار ٠,١٣٥ إلى كسر اعتيادي

◀ الحل :

$$\text{المقدار } ٠,١٣٥ = ٠,١٣٥١٣٥١٣٥ \dots \infty$$

$$= \left[\frac{١}{١٠} + \frac{١}{٤١٠} + \frac{١}{٧١٠} + \dots \infty \right]$$

$$+ \left[\frac{٣}{١٠٠} + \frac{٣}{٥١٠} + \frac{٣}{٨١٠} + \dots \infty \right]$$

$$+ \left[\frac{٥}{١٠٠٠} + \frac{٥}{٦١٠} + \frac{٥}{٩١٠} + \dots \infty \right]$$

وكلاً من المقادير بين الأقواس يمثل متوالية هندسية لانهاية .

$$\text{المتوالية الأولى حدها الأول } = \frac{١}{١٠} \text{ وأساسها } \frac{١}{١٠٠٠}$$

$$، \text{ المتوالية الثانية حدها الأول } = \frac{٣}{١٠٠} \text{ وأساسها } \frac{١}{١٠٠٠}$$

$$، \text{ المتوالية الثالثة حدها الأول } = \frac{٥}{١٠٠٠} \text{ وأساسها } \frac{١}{١٠٠٠} \text{ كذلك}$$

$$\therefore \text{ فمجموع هذه المتواليات } = \frac{١}{١٠٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠} + \frac{٥}{١٠٠٠} = \frac{٩}{١٠٠٠}$$

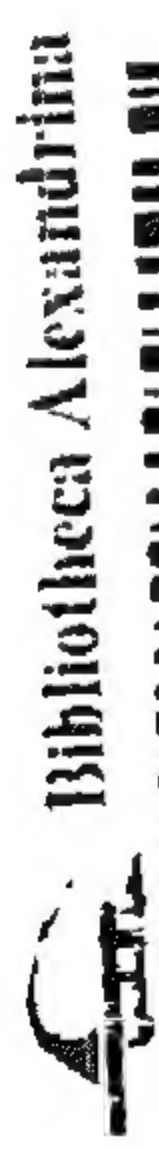
$$= \frac{٩}{١٠٠٠} + \frac{٣٠}{٩٩٩} + \frac{٥}{٩٩٩} = \frac{١٣٥}{٩٩٩} = \frac{٥}{٣٧}$$



الفهرس

٥	المقدمة
٩	الباب الأول : ألغاز رقمية
٣٥	الباب الثاني : عمليات مفبدة مع الأرقام
٥١	الباب الثالث : المربعات العجيبة
٦٣	الباب الرابع : مسائل رياضية متنوعة
٩٣	الباب الخامس : فوازير رياضية
١٢٦	الباب السادس : الفائدة العلمية من مسائل المتواليات

رقم الإيداع بدار الكتب ٤٣٢٨ / ١٩٩٠



Bibliotheca Alexandrina



0404868